Pb: voglio calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos(x)-1)}{\cos(x)-1}$

questo "assomiglia" a $\lim\limits_{Y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} Y}{Y}$ dove $Y=\cos(x)-1$!

Il pb è: posso cambiare variabile? È vero che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\cos(x)-1)}{\cos x-1} \underset{\uparrow\, y=\cos(x)-1}{\overset{?}{=}} \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}=1$$

Teorema (cambiamento di variabile nei limiti)

$f: A\to\mathbb{R}$ $\quad g: B\to\mathbb{R}$ $\quad \Omega = f^{-1}(f(A)\cap B)$ (dominio di $(g\circ f)$!)

suppongo x_0 p.d.a. per Ω

y_0 p.d.a. per $f(A)\cap B$

e sia

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0 \qquad \lim_{y\to y_0} g(y)=L$$

Se è soddisfatta una delle seguenti ipotesi

i) $\exists W\in \mathcal{U}_{x_0}$: $f(x)\neq y_0$ $\forall x\in (W\cap A)\setminus\{x_0\}$

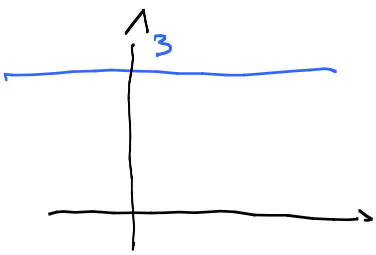
ii) $g(y_0)=L$

allora

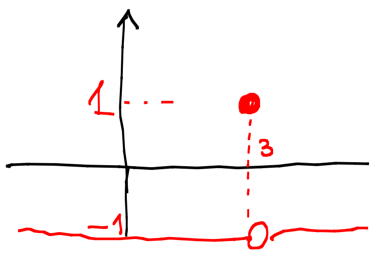
$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) \underset{y=f(x)}{=} \lim_{y\to y_0} g(y) = L$$

Controesempio

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3$ $\forall x\in\mathbb{R}$



" $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}-1 & x\neq 3\\ +1 & x=3\end{cases}$



$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3 \qquad \lim\limits_{y\to 3} g(y) = -1$

però

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3) = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} (g\circ f)(x) = 1$

Perché?

$g(3) \neq -1 = \lim\limits_{y\to 3} g(y)$ e dunque non vale la 2)

$f(x) = 3 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ " " " " " 1)

Teorema

$\{a_n\}_n$ monotone crescente (decrescente)

allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

$(\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\})$

Esempio

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ questa è crescente strettamente

$\sup\{\operatorname{arctg}(x) : x\in\mathbb{R}\} = \frac{\pi}{2}$

e si ha infatti $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = x^2$ questa su $]0,+\infty[$ è strettamente crescente

$\sup\{x^2 : x>0\} = +\infty$

e infatti $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$$\mathbb{R} \ni \Lambda = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda \geq a \quad \forall a \in A & \text{(è un maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{x} = \bar{x}(\varepsilon) \in A \quad \Lambda - \varepsilon < \bar{x} & \text{(Λ è il minimo dei maggioranti)} \end{cases}$$

$$\mathbb{R} \ni \Lambda = \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq \Lambda \quad \forall x \in A & \text{(Λ è un maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \underset{\bar{x}(\varepsilon)}{\underset{\shortparallel}{\bar{x}}} \in A \; : \; \Lambda - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases}$$

$$\Lambda = +\infty = \sup f(A) \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \bar{x} \in A \; : \; M < f(\bar{x})$$

$$\mathbb{R} \ni \lambda = \inf f(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \leq f(x) \quad \forall x \in A & \text{(λ è un minorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{x} = \bar{x}(\varepsilon) \in A \quad f(\bar{x}) < \lambda + \varepsilon \end{cases}$$

$$-\infty = \lambda = \inf f(A) \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \bar{x} = \bar{x}(M) \in A \quad f(\bar{x}) < M$$

Teorema (limiti di funzioni monotone su un intervallo)

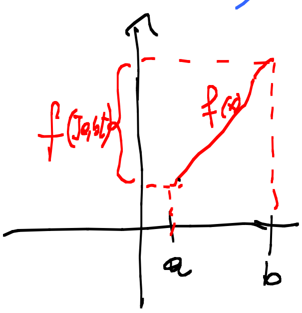
$f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $\quad f$ sia crescente debolmente (decrescente)

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf f(]a,b[) \quad (\sup f(]a,b[))$$

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f(]a,b[) \quad (\inf f(]a,b[))$$

dim

Suppongo f crescente strettamente su $]a,b[$

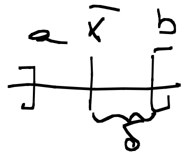


Sia $\Lambda = \sup f(]a,b[) \in \mathbb{R}$ + f strett. crescente

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} f(x) \le \Lambda \quad \forall x \in]a,b[& ① \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \bar{x}(\varepsilon) \in]a,b[\quad \Lambda - \varepsilon < f(\bar{x}) & ② \end{cases}$$

$\bar{x} < x \Rightarrow f(\bar{x}) < f(x)$ ③



$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \bar{x} \in]a,b[\quad \forall x \in]a,b[\quad \bar{x} < x \Rightarrow \Lambda - \varepsilon \underset{②}{<} f(\bar{x}) \underset{③}{<} f(x) \underset{①}{\le} \underset{\Lambda+\varepsilon}{\underset{\wedge}{\Lambda}} .$$

$\Downarrow$ $\boxed{\delta = b - \bar{x}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = b - \bar{x} > 0 \quad \forall x \in]a,b[\quad 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow \Lambda - \varepsilon < f(x) < \Lambda + \varepsilon$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \Lambda$$

$\longleftrightarrow$

$\mathbb{R} \ni \lambda = \inf f(]a,b[)$ + f strettamente crescente

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \lambda \le f(x) \quad \forall x \in]a,b[& ① \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \bar{x}(\varepsilon) \in]a,b[\quad f(\bar{x}) < \lambda + \varepsilon & ② \\ x < \bar{x} \Rightarrow f(x) < f(\bar{x}) & ③ \end{cases}$$

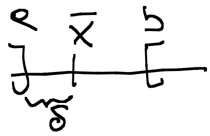
① λ è un minorante di $f(]a,b[)$

② λ è il massimo tra i minoranti di $f(]a,b[)$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \bar{x} \in]a,b[: \forall x \in]a,b[\quad x < \bar{x} \quad \lambda - \varepsilon \overset{\text{ovvia}}{<} \lambda \underset{①}{\le} f(x) \underset{③}{<} f(\bar{x}) \underset{②}{<} \lambda + \varepsilon$$

$\Downarrow$ $\delta = \bar{x} - a$



$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \bar{x} - a > 0 : \forall x \in]a,b[\quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \lambda - \varepsilon < f(x) < \lambda + \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lambda = \inf f(]a,b[) \qquad \square$$

FUNZIONI CONTINUE

Def

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ diciamo "f continua in x_0"

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \ \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Esempi $f(x) = 5 \ \forall x \in \mathbb{R}$, è una funzione continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = x$ è una funzione continua $\forall x \in \mathbb{R}$

infatti

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| = |f(x) - f(x_0)| < \delta = \varepsilon$$

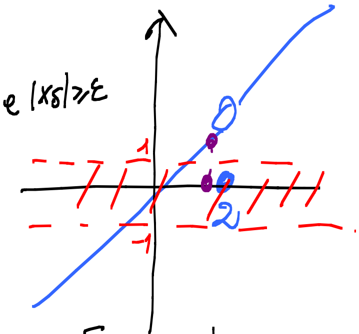
Controesempi la funzione $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 2$

infatti proviamo che

$$\text{non}\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 0| < \varepsilon\right)$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \quad |x_\delta - 2| < \delta \ \text{ e } \ |x_\delta| \geq \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1 \quad \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta = \max\left\{2 - \frac{\delta}{2}, \frac{3}{2}\right\} \quad |x_\delta - 2| < \delta \ \text{ e } |x_\delta| \geq \varepsilon$$



$$\delta > 1 \Rightarrow 2 - \frac{\delta}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow x_\delta = \max\left\{2 - \frac{\delta}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} \qquad \left|\frac{3}{2} - 2\right| = \frac{1}{2} < 1 < \delta \ \text{ e } \ \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} > 1$$

$$\delta \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{\delta}{2} \Rightarrow x_\delta = 2 - \frac{\delta}{2} \qquad \left|2 - \frac{\delta}{2} - 2\right| = \frac{\delta}{2} \leq \delta \ \text{ e } \ \left|2 - \frac{\delta}{2}\right| \geq \frac{3}{2} > 1$$

e dunque la funzione <u>non è</u> continua in $x_0 = 2$

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A

f continua in x_0 sse $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Oss: quando f è continua in x_0 p.d.a. allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

dim

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ x_0 p.d.a per A

f continua in x_0

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

è vero poiché x_0 è p.d.a.

$\Downarrow$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

viceversa

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

infatti $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

$\blacksquare$

Oss: Nei punti di accumulazione per A

continuità in x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim f(x) = f(x_0)$

Pb: e nei punti isolati? cosa accade?

Risposta $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.to isolato per A
$\Rightarrow f$ continua in x_0

Infatti $x_0 \in A$ isolato $\Rightarrow \exists \bar{\delta}$ $\quad A \cap]x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}[= \{x_0\}$
e quindi

$$\forall \varepsilon>0 \ \underbrace{\exists \delta>0, \ \delta<\bar{\delta}}_{\substack{\text{non è}\\ \text{restrittivo, io}\\ \text{devo trovare 1}\\ \text{valore di } \delta}} : \forall x \in A \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

ma quando $\delta<\bar{\delta}$ $\qquad A \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq A \cap]x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}[= \{x_0\}$
e quindi
$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \in (0,\bar{\delta}) \quad x \in A \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[= \{x_0\} \Rightarrow |f(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Teorema (permanenza del segno)
$f: A \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$ p.d.a per A

Se $f(x_0)>0$ (<0)

allora $\exists \delta>0$: $f(x)>0$ (<0) $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A$

(per la dim vedi il Teorema della permanenza del segno visto per i limiti di funzioni)

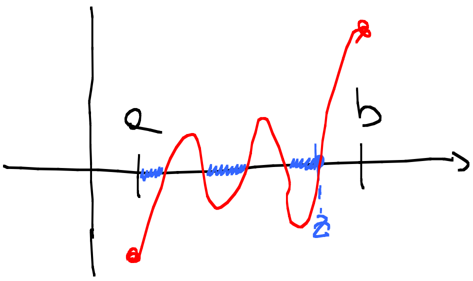
Teorema (Esistenza degli zeri)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$; f continua $\forall x\in[a,b]$, $f(a)\,f(b)<0$

$$\Rightarrow \exists z\in\,]a,b[\;:\; f(z)=0$$

dim (Teorema Bolzano)

$f(a)\cdot f(b)<0$ sia $f(a)<0<f(b)$



$A=\{x\in[a,b] : f(x)<0\}$

è l'insieme in blu

$A\neq\emptyset$ perché $a\in A$ $(f(a)<0)$

inoltre $A\subseteq[a,b]$ e quindi

è superiormente limitato da b

Dunque $\boxed{\exists\, z=\sup A}$

$f(a)<0 \Rightarrow \exists\delta>0 : f(x)<0 \;\forall x\in[a,b]\cap\,]a-\delta,a+\delta[$

Teorema Permanenza Segno

$$\Rightarrow f(x)<0 \quad \forall x\in\,]a,a+\delta[$$

$$\Rightarrow z=\sup\{x \;\; f(x)<0\}\geq a+\delta$$

$f(b)>0 \Rightarrow \exists\delta>0 : f(x)>0 \;\forall x\in[a,b]\cap\,]b-\delta,b+\delta[$

Teorema Permanenza Segno

$$\Rightarrow f(x)>0 \quad \forall x\in\,]b-\delta,b[$$

$$\Rightarrow z=\sup\{x \;\; f(x)<0\}\leq b-\delta$$

dunque $z\in\,]a,b[$ (è interno!!)

Possono presentarsi 3 casi

1) $f(z)<0$
2) $f(z)=0$ ← noi vogliamo questo
3) $f(z)>0$

1) $f(z)<0 \underset{\text{Teorema perm. segno}}{\Longrightarrow} \exists \delta>0 : f(x)<0 \ \forall x \in]z-\delta, z+\delta[$

$\Longrightarrow f(x)<0 \ \forall x \in]z, z+\delta[$

$\Longrightarrow z+\delta \leq \sup\{x : f(x)<0\} = z$

ASSURDO

3) $f(z)>0 \underset{\text{T.P.S.}}{\Longrightarrow} \exists \delta>0 \ f(x)>0 \ \forall x \in]z-\delta, z+\delta[$

$\Longrightarrow f(x)>0 \ \forall x \in]z-\delta, z[$

$\Longrightarrow \underset{\underset{z}{\shortparallel}}{\sup\{x : f(x)<0\}} \leq z-\delta$

ASSURDO

Ne segue che 2) è vero, cioè $\boxed{f(z)=0}$

Nel caso $f(a)>0>f(b)$, si ottiene il risultato studiando $g(x)=-f(x)$

$\blacksquare$