Def $\sum_n a_n$ è una serie a termini positivi se $a_n \geq 0 \; \forall n$

Importante $\sum_n a_n$ è a termini positivi allora $\sum_n a_n$ converge o diverge a $+\infty$
ovvero
le serie a termini positivi NON SONO MAI INDETERMINATE

Serie a termini di segno qualsiasi

Vogliamo utilizzare tutti i risultati ottenuti per le serie a termini positivi. Il problema è che
$\sum_n a_n$, in generale, ha $a_n >=< 0$
nel caso delle serie a termini di segno $\forall$
esempio
$\sum_n \frac{\sin n}{n^2}$ è a termini di segno $\forall$

l'idea è considerare $\sum_n |a_n|$, ovvero la serie che ha come termine generale i moduli di a_n: la serie così costruita
$$\sum_n |a_n|$$
è una serie a termini positivi, poiché $|a_n| \geq 0$

Def (convergenza assoluta)
Data $\sum_n a_n$, diciamo che questa serie
Converge ASSOLUTAMENTE
se converge $\sum_n |a_n|$

Esempio
$\boxed{\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}}$, in questo caso $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

e dunque

$\sum_n |a_n| = \sum_n \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right| = \boxed{\sum_n 1/n^2}$

e dunque, dato che $\sum_n 1/n^2$ converge, ne segue che $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ converge assolutamente

Tb: che relazione c'è tra "convergenza" e "convergenza assoluta"?

Teorema (Assoluta convergenza $\Rightarrow$ convergenza)

Sia data $\sum_n a_n$ serie a termini di segno $\forall$

Se $\sum_n |a_n|$ converge allora $\sum_n a_n$ converge

dim

Devo provare che $\sum_n a_n$ converge, cioè per il criterio di Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall n > \bar{n} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \underbrace{|a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1}| < \varepsilon}$

]questa è la Tesi

Per ipotesi $\sum_n |a_n|$ converge, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall n > \bar{n} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \underbrace{|a_{n+k}| + |a_{n+k-1}| + \dots + |a_{n+1}| < \varepsilon}$

La disuguaglianza triangolare dice che $|A+B| \le |A| + |B|$ da cui segue che $|a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1}| \le |a_{n+k}| + |a_{n+k-1}| + \dots + |a_{n+1}|$

Ne segue la Tesi $\blacksquare$

Esempio $\sum_n \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ studiamo la convergenza

dim

$\operatorname{sen} 1 > 0 \quad \operatorname{sen} 2 > 0 \quad \operatorname{sen} 3 > 0 \quad \operatorname{sen} 4 < 0 \quad \operatorname{sen} 5 ?$

è complicato da studiare.

Però $\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$

e $\sum_n 1/n^2$ è convergente $\overset{\text{criterio del confronto}}{\Rightarrow} \sum_n \left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right|$ converge

$\Rightarrow \sum_n \left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right|$ converge assolutamente

$\Rightarrow \sum_n \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge $\boxed{///}$

Serie a termini di segno alterno

Def Una serie si dice "a termini di segno alterno" se è della forma

$$\sum_n (-1)^n \cdot a_n \quad \text{con } a_n \geq 0$$

Esempio $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ è a termini di segno alterno

$\sum_n \frac{\operatorname{sen} n}{n}$ è a termini di segno $\forall$ ma non alterni

$\sum_n \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}$ è a termini di segno alterno

$\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1 \quad \operatorname{sen}\frac{5}{2}\pi = 1 \quad \operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi = -1$

Teorema (Criterio di Leibniz)

$\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ serie a termini di segno alterno

$a_n \geq 0$

$a_n \geq a_{n+1} \; \forall n$ (debolmente decrescente) $\Rightarrow \sum_n (-1)^n \cdot a_n$ converge

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

dim

Vado a studiare la convergenza di $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot a_k}$

$S_1 = (-1)^1 \cdot a_1 = -a_1 \qquad S_2 = S_1 + (-1)^2 \cdot a_2 = -a_1 + a_2$

$S_3 = -a_1 + (a_2 - a_3) \qquad S_4 = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = S_2 - (a_3 - a_4)$

$S_5 = S_3 + a_4 - a_5 \qquad S_6 = S_4 - (a_5 - a_6)$

$a_n \downarrow \Rightarrow a_2 - a_3 \geq 0 \qquad a_3 - a_4 \geq 0$

$a_4 - a_5 \geq 0 \qquad a_5 - a_6 \geq 0$

- Proviamo che $\{S_{2n}\}_n$ è decrescente, infatti,

$S_2 \geq S_4$

inoltre suppongo $S_{2n-2} \geq 2n$

e si ha che $S_{2n+2} = S_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \leq S_{2n}$

- Allo stesso modo si prova che $\{S_{2n+1}\}$ è crescente
- inoltre $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \quad \forall n$

Riassumendo $S_{2n} \downarrow$ $\quad S_{2n+1} \uparrow$ ed inoltre

$$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_2$$

Dunque $\exists\, S_d = \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} \quad S_p = \lim_{n\to+\infty} S_{2n}$

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} \cdot a_{2n+1} = 0$$

$$\begin{gathered} \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} S_{2n} \\ \| \\ S_d - S_p \end{gathered} \qquad \Rightarrow S_d = S_p = S$$

$$S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \;+\; S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \;+\; \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n+1}\} = \{S_n\}$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$$

▯

Esempio $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ •) converge
•) non converge assolutamente

dim

$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ è a termini di segno alterno

$$S_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} \geq 0 \\ \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \\ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Criterio Leibniz}}{\Longrightarrow} \sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \text{ converge}$$

• $\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_n \frac{1}{n}$ e questa è la serie armonica che diverge a $+\infty$

ovvero

non ho convergenza assoluta per $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

Oss: Nel caso delle serie a termini positivi si ha che

convergenza $\Longleftrightarrow$ assoluta convergenza

Oss Data una serie a termini di segno alterno $\sum_n (-1)^n a_n$ convergente nelle ipotesi del Criterio di Leibniz

$S_{2n} \downarrow$, $S_{2n+1} \nearrow$ e si ha quindi $\boxed{\forall n}$

$$\begin{cases} S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \end{cases} \qquad S = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -a_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0 \\ 0 \leq S - S_{2n+1} \leq a_{2n+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |S - S_{2n}| \leq a_{2n+1} \\ |S - S_{2n+1}| \leq a_{2n+2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|S - S_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{quando vale il Criterio di Leibniz}}$$

Esempio Data la serie $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

Considero 6

$$S_6 = \sum_{k=1}^{6} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{-60+30-20+15-12+10}{60} =$$

$$= \frac{-92+55}{60} = -\frac{37}{60}$$

Se prendo $-\frac{37}{60}$ in luogo di $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$

che errore commetto?

Commetto un errore $\leq \frac{1}{7}$, cioè

$$\left| S - \left(-\frac{37}{60}\right) \right| \leq \frac{1}{7}$$

Topologia (Cenni)

•) $x_0 \in \mathbb{R}$, diciamo U intorno di x_0 se esiste $\delta > 0$ t.
$]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq U$

•) $+\infty$, " U intorno di $+\infty$ se esiste $a \in \mathbb{R}$
t.c. $]a,+\infty[\subseteq U$

•) $-\infty$, " U " " $-\infty$ se esiste $b \in \mathbb{R}$
t.c. $]-\infty, b[\subseteq U$

$\mathcal{U}_{x_0} \equiv$ Totalità degli intorni di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Esempio

1) $]-2,3[\in \mathcal{U}_0$, $]-2,3[\cup \{5\} \in \mathcal{U}_0$

2) $]0,+\infty[\in \mathcal{U}_{+\infty}$, $\{-4,-5\} \cup]2,+\infty[\in \mathcal{U}_{+\infty}$

3) $]-\infty, 3[\in \mathcal{U}_{-\infty}$ $\{5,6\} \cup]-\infty, 2] \in \mathcal{U}_{-\infty}$

Frontiera di A

$x_0 \in \mathcal{F}(A)$ se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $U \cap A \neq \emptyset$
$U \cap \complement A \neq \emptyset$

Interno di A

$x_0 \in A$ si dice interno ad A se $\exists\, U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $U \subseteq A$

$\overset{\circ}{A} = \{$interno di $A\} \equiv \{x : x$ interno ad $A\}$

Esempio

$A=\{0,1\}\cup\,]2,3]$ allora

$\mathcal{F}(A)=\{0,1,2,3\}$

$\mathring{A}=\{x:\ 2<x<3\}=\,]2,3[$

ovvero che $\quad x\in\mathring{A}\Rightarrow x\notin\mathcal{F}(A)$

$x\in A,\ x\in\mathcal{F}(A)\Rightarrow x\notin\mathring{A}$

Oss: $A\subseteq\mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}(A)=\mathcal{F}(\complement A)$

infatti $\quad x_0\in\mathcal{F}(A)$ se $\forall U\in\mathcal{U}_{x_0}$ $\quad U\cap A\neq\emptyset \quad U\cap\complement A\neq\emptyset$

$x_0\in\mathcal{F}(\complement A)$ se $\quad$ " $\quad U\cap\complement A\neq\emptyset \quad U\cap\complement(\complement A)=U\cap A\neq\emptyset$

Punto Isolato

$x_0\in A$ è isolato (per A) se $\exists U\in\mathcal{U}_{x_0}$ $\quad U\cap A=\{x_0\}$

Punto di Accumulazione

x_0 questo si dice "punto di accumulazione per A" (p.d.a. per A) se $\quad \forall U\in\mathcal{U}_{x_0} \quad (U\cap A)\setminus\{x_0\}\neq\emptyset$

Teorema

$A\subseteq\mathbb{R}$ $\quad x_0\in\mathring{A}$ allora x_0 è p.d.a. per A

dim

$x_0\in\mathring{A}\Rightarrow \exists\delta>0:\ ]x_0-\delta,x_0+\delta[\,\subseteq A$

Preso $U\in\mathcal{U}_{x_0}$, si ha che $U\cap\,]x_0-\delta,x_0+\delta[\,=W\in\mathcal{U}_{x_0}$

e si ha $W\subseteq A$ (poiché $]x_0-\delta,x_0+\delta[\,\subseteq A$)

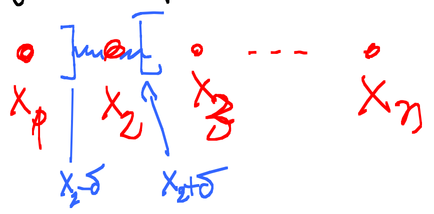
ma allora $x_0-\frac{\delta}{2}\in(U\cap A)\setminus\{x_0\}$ e quindi la tesi ■

Oss: Dato A $\quad x_0$ è isolato per $A \Rightarrow x_0$ non è p.d.a. per A

Oss: Dato $A=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ovvero finito

$\Rightarrow A$ non possiede p.d.a.

infatti i punti di A sono tutti isolati



Ad esempio preso x_2 si ha che $]x_2-\delta, x_2+\delta[\, \cap A = \{x_2\}$ non appena si prende $0<\delta<\min\{|x_2-x_1|, |x_2-x_3|\}$

Oss: dato x_0 p.d.a. per A, preso $U \in \mathcal{U}_{x_0}$

$\Rightarrow U \cap A$ contiene ∞ punti di $A \neq x_0$

Oss: x_0 p.d.a per $A \not\Rightarrow x_0 \in A$

Esempio $A=\{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$

si ha che $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$ sono tutti punti isolati di A

$0 \notin A$ però 0 è p.d.a. per A infatti

$\forall \delta>0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : 0<\frac{1}{n}<\delta$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}_0 \quad (U \cap A)\setminus\{0\} \neq \emptyset$

(infatti $\forall U \in \mathcal{U}_0 \quad \exists \delta>0 : \quad]-\delta, \delta[\, \subseteq U$ ma $\forall \delta>0 \quad \exists n: \quad 0<\frac{1}{n}<\delta$ e dunque $U \cap A \neq \emptyset$)