Def Diciamo "Serie numerica di termine generale a_n" e la indichiamo con $\sum_n a_n$ la successione $\{S_n\}_n$ ove $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ somma (o ridotta) parziale n-esima

ovvero

$$\sum_n a_n \equiv \{S_n\}_n = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_n$$

$\sum_n a_n$ converge e S = somma della serie se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

" diverge a $\pm\infty$ se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ $(-\infty)$

" indeterminata se $\nexists \lim_{n\to+\infty} S_n$

$\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ serie di Mengoli convergente $S=1$

$\sum_n n$ serie divergente poiché $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\sum_n (-1)^n$ serie indeterminata poiché

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

e dunque non converge

$S_1 = -1$

$S_2 = -1+1 = 0$

$S_3 = -1+1-1 = -1$

Serie geometrica $\sum_n q^n$

$$\sum_n q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{convergente a } \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Serie armonica generalizzata $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > 1 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases} \text{ da dimostrare}$$

Pb: se sommo infiniti numeri TUTTI strettamente $\geq c > 0$ allora la somma come è?

R: $+\infty$, poiché

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq c + c + \dots + c = n \cdot c$$

ma $nc \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ essendo $c>0$

Pb: se $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$ $\quad a_k \geq 0$

allora $\lim_{k\to+\infty} a_k = ?$

R: "mi aspetto" che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Teorema (CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA per $\sum_n a_n$)

Data una serie $\sum_n a_n$ $\quad a_n \in \mathbb{R}$

Se $\sum_n a_n$ converge a $S \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

dim

Sia $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$ (per ipotesi)

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

limite somma = somma dei limiti

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}}_{S-S} = \lim_{n\to+\infty} a_n \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \blacksquare$$

Oss: $\sum_n a_n$ converge $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

e il viceversa?

$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \sum_n a_n \text{ converge}}$

è falsa, ovvero la condizione del teorema precedente è solo necessaria ma non sufficiente

Controesempio $\sum_n 1/n$ è divergente a $+\infty$

ma $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$

Considero $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Devo (voglio!) provare che
$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Ricordo che " $\{S_n\}_n$ successione reale
$\{S_n\}$ converge $\underline{\text{se}}$ $\{S_n\}$ è di Cauchy "

Proverò che $\{S_n\}_n$ $\underline{\underline{\text{non}}}$ $\underline{\underline{\text{è}}}$ di Cauchy (e dunque non converge)

Voglio provare che

$$\text{non}\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0 : \forall n,m>\nu \quad |S_n - S_m| < \varepsilon\right)$$

$$\text{non}\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0 : \forall n>\nu\ \forall k\in\{0,1,2\dots\} \quad |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon\right)$$

$$\boxed{\exists\varepsilon>0\ \forall\nu>0\ \exists n>\nu\ \exists k\in\mathbb{N}_0 \quad |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon} \quad \$$$

$$S_{n+k} - S_n = \sum_{j=1}^{n+k} a_j - \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j =$$

$$= \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$$

prendo $k = n$

$$S_{m+m} - S_m = \sum_{j=m+1}^{2m} \frac{1}{j} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \geq \underbrace{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ volte}}$$

ovvero

$$S_{2m} - S_m \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\exists \varepsilon = \tfrac{1}{2} \ \ \forall \nu > 0 \ \ \exists m > \nu \ \ \exists k = m \ : \ \left| S_{m+m} - S_m \right| = S_{2m} - S_m \geq \frac{1}{2}$$

dunque ho violato la condizione di Cauchy

" la successione $\{S_n\}$ non converge

" " serie $\sum_n a_n$ " "

Inoltre $S_1 = \frac{1}{1} < S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} < S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \dots < S_n <$

ovvero $\{S_n\}_n$ è crescente, e quindi $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sup_n S_n$

ma $\{S_n\}_n$ non converge

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

Teorema (Criterio di Cauchy per serie numeriche)

Data la serie $\sum_n a_n$, si ha che

$\sum_n a_n$ converge sse $\{S_n\}_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}_n$ è di Cauchy

sse $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu > 0 \ \forall n > \nu \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ \underbrace{\left| a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1} \right|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon$

Oss: $\sum_n a_n$ converge sse $\{S_n\}_n$ è di Cauchy

Oss $\sum_n \frac{1}{n}$

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$S_8 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$S_{18} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

SERIE A TERMINI POSITIVI

Def (serie a termini positivi)

$\sum_n a_n$ è detta "serie a termini positivi" se $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema ($\sum_n a_n$ $a_n \geq 0$ allora $\sum_n a_n$ converge o diverge a $+\infty$)

Se $\sum_n a_n$ è serie a termini positivi allora $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = S \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$

dim

$\sum_n a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ Considero $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\left.\begin{aligned} &S_1 = a_1 \\ &S_2 = S_1 + a_2 \underset{a_2 \geq 0}{\geq} S_1 \\ &S_3 = S_2 + a_3 \underset{a_3 \geq 0}{\geq} S_2 \\ &S_4 = S_3 + a_4 \underset{a_3 \geq 0}{\geq} S_3 \\ &\ldots \\ &S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \underset{a_n \geq 0}{\geq} S_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\{S_n\}_n$ è una successione debolmente crescente

$\Downarrow$

$\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sup_n S_n$

e questo può essere $\in \mathbb{R}$

" " $+\infty$

∎

Teorema (Criterio del confronto)

$\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ serie a termini positivi ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$) tali che $a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$

1) $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$ $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$

2) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

dim

$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad n > n_0$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$$

$a_k \leq b_k \ \forall k > n_0$

$$= A_{n_0} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n_0} b_k\right)$$

$$= A_{n_0} + B_n - B_{n_0}$$

$$\boxed{A_n \leq B_n + (A_{n_0} - B_{n_0}) \qquad \forall n > n_0}$$

1) $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ $\underset{\text{Confronto x successioni}}{\Rightarrow}$ $\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$

$\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge

2) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} B_n = B < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n \leq B + A_{n_0} - B_{n_0}$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ converge $\quad$ ////

Esercizio

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \underline{\alpha \geq 2} \\ \text{diverge} & \underline{\alpha \leq 1} \end{cases}$ manca la discussione quando $1 < \alpha < 2$ ove la la serie converge

dim

Proviamo che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geq 2$

La confronto con $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$, la serie di Mengoli

lo so che $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ converge

$\Rightarrow \boxed{\sum_n \frac{2}{n(n+1)} \text{ converge}} \quad \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

ma $\boxed{\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{vero!!}}$

$$\left(\begin{array}{ll} \frac{1}{n} \leq \frac{2}{(n+1)} & \forall n \\ n+1 \leq 2n & \forall n \end{array}\right)$$

Tlo $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall \alpha > 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha > 2$

Proviamo che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge $\forall \alpha \leq 1$

infatti $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge

inoltre $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ $\forall \alpha \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Longrightarrow \sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge $\forall \alpha \leq 1$

Teorema (Criterio del confronto Asintotico)

Date $\sum_n a_n$ $\sum_n b_n$ a termini positivi ($a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$)

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
$\sum_n b_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[$ $\Longrightarrow$ $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere (convergono o divergono entrambe)

dim

1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu > 0$ $\forall n > \nu$ $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = 1$ $\exists \nu > 0$ $\forall n > \nu$ $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1$

$\Downarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \quad \exists \nu > 0 \quad \forall n > \nu \quad 0 < a_n < b_n \\ \sum_n b_n \text{ converge} \end{array} \right.$ $\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}$ $\sum_n a_n$ converge

Criterio Confronto

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu > 0$: $\forall n > \nu$ $l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$

$\Downarrow$ $\varepsilon = l/2$

$\varepsilon = \frac{l}{2}$ $\exists \nu > 0$: $\boxed{\forall n > \nu \quad \frac{l}{2} \cdot b_n < a_n < \left(\frac{3}{2} l\right) b_n}$ (*)

Teorema confronto

$(*) + \sum_n b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge

$(*) + \sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

$(*) + \sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge

$(*) + \sum_n a_n$ converge $\Rightarrow \sum_n b_n$ converge $\boxed{//}$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \frac{n+3}{n^3-2n+50}$$

dim

$$a_n = \frac{n+3}{n^3-2n+50} = \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{3}\,2}} \cdot \frac{1+3/n}{1-2/n^2+50/n^3} = \frac{1}{n^2}\cdot\left(\begin{array}{c}\text{qualcosa che tende}\\ \text{a } 1\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\cancel{n^2}} \cdot \dfrac{1+3/n}{1-2/n^2+50/n^3} \cdot \dfrac{\cancel{n^2}}{1} \\ \quad = \dfrac{1+0}{1-0+0} = 1 \in \,]0,+\infty[\\ \sum_n 1/n^2 \text{ converge} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ converge $\boxed{//}$

Esercizio

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

1) $\sum_n \left(\frac{1}{\alpha+3}\right)^{2n}$

2) $\sum_n n^{-(\alpha^2+3\alpha+3)}$

dim

1) serie geometrica che per convergere richiede che

$$\left(\frac{1}{\alpha+3}\right)^2 < 1$$

- - -

2) serie armonica generalizzata $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha^2+3\alpha+3}$

questa converge <u>se</u> $\alpha^2+3\alpha+3 > 1$

se $\alpha^2+3\alpha+2 > 0$

- - -