

Esercizio Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3} \left(\frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$ ①

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2 \cdot n!}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ③

① $\infty(0-0) = 0 \cdot \infty$

$$\sqrt{n^3} \left(\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{n-2} \sqrt{n+3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-2}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-2}} =$$

$$= \sqrt{n^3} \cdot \frac{\cancel{n+3} - \cancel{n-2}}{\sqrt{n+3} \sqrt{n-2} (\sqrt{n+3} + \sqrt{n-2})} = \frac{\cancel{n}^{3/2} \cdot 5}{\cancel{n}^{3/2} \cdot \sqrt{1+\frac{3}{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{2}{n}} \cdot (\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}})}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{2}{n}} \cdot (\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{1+0} \cdot \sqrt{1-0} \cdot (\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0})} = \frac{5}{2}$$

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2(n!)^2} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Applico il criterio del rapporto alle successioni $Q_n = \frac{(2n)!}{2 \cdot (n!)^2}$

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{(2n+2)!}{2 \cdot (n+1)!^2} \cdot \frac{2 \cdot (n!)^2}{(2n)!} =$$

$$= \frac{\cancel{(2n)!} \cdot (2n+1)(2n+2)}{\cancel{(n!)^2} (n+1)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)} = 2 \cdot (2n+1)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(2n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$$

Criterio Rapporto

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Possio $Q_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$$



Esercizio se $-5 \leq a_n \leq 3 \forall n$ allora $(a_n \in \mathbb{R})$ 2

(A) $a_n \cdot a_{n+1} \leq 25$

(C) $\inf_n a_n = -5$

(B) $-5 \leq |a_n| \leq 3$

(D) $\max_n a_n = 3$

dim

(D) è falsa infatti, preso $a_n = 1 \forall n$ questa soddisfa
 $-5 \leq a_n \leq 3$

però $\max a_n = 1 \neq 3$

quindi IN GENERALE la (D) non è vera

(C) è falsa basta prendere la successione $a_n = 1 \forall n$ e si ha
 $\inf a_n = 1 \neq -5$

(B) è falsa infatti preso $a_n = -5 \forall n$ si ha
 $|a_n| = 5 > 3 !!$

(A) è vero infatti, $-5 \leq a_n \leq 3 \Rightarrow |a_n| \leq 5$
 $\Rightarrow a_n \cdot a_{n+1} \leq |a_n| \cdot |a_{n+1}| \leq 5 \cdot 5 = 25$ 

Esercizio

17) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando $n \rightarrow +\infty$, si ha $n^2 a_n \rightarrow 0$, $n^3 b_n \rightarrow 0$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - b_n) = 0$; (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 a_n \cdot b_n = 0$

(D) è vero infatti, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 \cdot a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 b_n$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot (n^3 b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 b_n$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

(C) è vero $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 a_n}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 b_n}{n^2}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 b_n$$

$$= 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

(B) è vero $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \frac{n^2}{n^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \cdot \frac{n^3}{n^3}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 b_n = 0 + 0 = 0$$

(A) è falso $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_n}{b_n} = 1$

lo so che $n^2 Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$ posso pensare $Q_n = \frac{1}{n^3}$

$$n^3 b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty \Rightarrow b_n = \frac{1}{n^4}$$

osservo che $\frac{Q_n}{b_n} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n^4}{1} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \neq 1$

dunque la (A) è falsa

Esercizio

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{A^n}$ al variare di $A > 0$
line

$$A=1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\sqrt[n]{Q_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{A^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{A} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \quad \begin{cases} 0 < A < 1 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{A^n} = +\infty \\ 1 < A & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{A^n} = 0 \end{cases}$$

□□□

Esercizio

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{A^n}$ al variare di $\alpha > 0, A > 0$
dim

$$A=1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{1^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$$

$$A > 0 \quad A \neq 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{A^n}} = \frac{1}{A} \cdot \sqrt[n]{n^\alpha} = \frac{1}{A} \left(\sqrt[n]{n} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \quad \begin{cases} 0 < A < 1 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{A^n} = +\infty \\ 1 < A & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{A^n} = 0 \end{cases}$$

□□□

Oss: $Q_n = n^\alpha \quad \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \Rightarrow \sqrt[n]{Q_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \forall \alpha > 0$

CONVEGUENZA

4

$$n^\alpha \ll A^n \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall A > 1$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \forall A > 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Esercizio

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$

dim

1ª via: formula di Stirling

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n e \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\frac{n}{e}} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{e}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{e}\right)}_{\downarrow +\infty}$$

$n \rightarrow +\infty$

$+\infty$

Teorema Corollari

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

2ª via (indiretta) e calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$?

$$Q_n = n! \quad \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{Q_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad \square$$

SERIE NUMERICHE

5

Il pb. è quello di dare un senso alla somma di ∞ termini
Non vale, in generale, la proprietà associativa

$$(2+3)-5 = 2+(3-5) \quad \text{associativa}$$

$$\sum_n (-1)^n = \underbrace{(-1+1)}_0 \underbrace{(-1+1)}_0 \underbrace{(-1+1)}_0 \underbrace{(-1+1)}_0 \dots \quad ? = 0$$

$$\sum_n (-1)^n = -1 + \underbrace{(1-1)}_0 + \underbrace{(1-1)}_0 + \underbrace{(1-1)}_0 + \underbrace{(1-1)}_0 \dots \quad ? = -1$$

$-1 + 0 + 0 + 0 + 0 \dots$

Quello che ci fa considerare

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = ((a_1 + a_2) + a_3) + a_4$$

Def (serie numerica)

Dato una successione $\{a_n\}_n$ reale (Termine Generale della Serie)
diciamo "Serie numerica di Termine generale a_n "

la successione $\{S_n\}_n = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}_n$ dette successione
delle somme (o residue) parziali
e le indichiamo con $\sum_n a_n$

Ovvero $\sum_n a_n \equiv \{S_n\}_n \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$\sum_n a_n \text{ converge a } S \equiv \text{somma della serie} \quad \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$1) \quad \text{diverge a } +\infty (-\infty) \quad \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty (-\infty)$$

$$2) \quad \text{non converge (indeti.)} \quad \Leftrightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Pb. di Notazioni ai test (la maggior parte)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ significa $\begin{cases} \text{serie numerica } \{S_n\}_n \\ \text{somma della serie per } n \rightarrow \infty \end{cases}$

Esempi
Serie di Telegoli $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$

La ridotta parziale è la seguente

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} + \frac{1}{2 \cdot (2+1)} + \frac{1}{3 \cdot (3+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\dots \dots S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Serie Geometrica $\sum_n q^n \quad q \in \mathbb{R}$



$$\begin{aligned} T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \dots &= T \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots \right) \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad q = \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{2} \end{aligned}$$

C ogni anno all'interesse del 3% per 10 anni

$$C \xrightarrow{1} C \cdot (1+i) + C \xrightarrow{2} C(1+i)^2 + C(1+i) + C \xrightarrow{3} C(1+i)^3 + C(1+i)^2 + C(1+i) + C$$

$$S_m = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^m = \sum_{k=0}^m q^k$$

$$\begin{aligned} (1-q) S_m &= (1-q) (1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1} + q^m) \\ &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1} + q^m - q - q^2 - \dots - q^m - q^{m+1} \\ &= 1 - q^{m+1} \end{aligned}$$

$$q \neq 1 \quad S_m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

$$q = 1 \quad S_m = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^m = m + 1$$

$$S_m = \sum_{k=0}^m q^k = \begin{cases} m+1 & q=1 \\ \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} & q \neq 1 \end{cases}$$

Ricordo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \end{cases}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_m = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} & q \neq 1 \\ +\infty & q = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ +\infty & q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \end{cases}$$

Pb: $0,999\dots 9 = 0, \overline{9} \begin{cases} = 1 \\ \neq 1 \end{cases} \quad ???$

$$1 - 0,999 = 0,001$$

$$1 - 0,9999 = 0,0001$$

$$\begin{aligned} 0,\overline{9} &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10^4} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots \\ &= \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \right) \\ &= \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2,\overline{12} &= 2 + 0,\overline{12} = \\ &= 2 + 0,12121212\dots \\ &= 2 + \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \dots + \frac{12}{10^{2n}} \\ &= 2 + \frac{12}{100} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots + \frac{1}{10^{2n}} + \dots \right) \\ &= 2 + \frac{12}{100} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^k = 2 + \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= 2 + \frac{12}{100} \cdot \frac{100}{99} = 2 + \frac{4}{33} = \frac{70}{33} \end{aligned}$$

Abbiamo provato che (potremmo provare)

Teorema

x è un numero decimale periodico
 $\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Serie armonica generalizzata
 $\sum_n \frac{1}{n}$ serie armonica

$\sum_n \left(\frac{1}{n} \right)^\alpha$ " " generalizzata $\begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge + } \infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$