Teorema

$\{a_n\}_n$ successione monotona crescente debolmente (decrescente)
allora
$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \qquad (\inf)$$

Esempi (sottosuccessione)

date $a_n = \frac{1}{n}\cdot(-1)^n$, posso considerare

$$b_n := a_{2n} = \frac{1}{2n}\cdot(-1)^{2n} = \frac{1}{2n} \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$c_n := a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}$$

$\{b_n\}_n$ è una successione, e $\{b_n\}_n \subseteq \{a_n\}_n$
$\{c_n\}_n$ " " " , " $\{c_n\}_n \subseteq \{a_n\}_n$

$$\overset{b_1}{\frac{1}{2}};\ \underset{c_1}{-\frac{1}{3}};\ \overset{b_2}{\frac{1}{4}};\ \underset{c_2}{-\frac{1}{5}};\ \overset{b_3}{\frac{1}{6}};\ \underset{c_3}{-\frac{1}{7}};\ \overset{b_4}{\frac{1}{8}};\ \underset{c_4}{-\frac{1}{9}};\ \overset{b_5}{\frac{1}{10}}$$

$$d_n = a_{3n+3}$$

$$d_1 = \frac{(-1)^{3+3}}{6} \qquad d_2 = \frac{(-1)^{6+3}}{9} \qquad d_3 = \frac{(-1)^{9+3}}{12}$$

$\{d_n\}_n$ è una successione e $\{d_n\} \subseteq \{a_n\}$

Controesempio (una successione che non è sottosucc.)

$$\{a_n\}_n = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_n = \left\{-\frac{1}{1}; +\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; +\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \dots\right\}$$

se prendo

$$\{t_n\} = \left\{\underset{a_{1000}}{\frac{1}{1000}};\ \underset{a_{100}}{\frac{1}{100}};\ \underset{a_2}{+\frac{1}{2}};\ \underset{a_{99}}{-\frac{1}{99}};\ \underset{a_{30}}{\frac{1}{30}};\ \dots\right\}$$

questa <u>non è</u> una sottosuccessione, poiché 2

non ho scelto gli indici in modo crescente

Lemma

Data $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzione crescente strettamente

allora $k(n) \geq n$

dim

Si dimostra per induzione e si ha

$k(1) \geq 1$ poiché $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

suppongo $k(n) \geq n$ (ipotesi induttiva)

Voglio provare $k(n+1) \geq n+1$

$$\underset{k \uparrow}{k(n+1) > k(n)} \underset{\text{ipotesi induttiva}}{\geq} n \implies k(n+1) \geq n+1$$

ricordate che, in $\mathbb{N}$,

$n > 5 \implies n \geq 6$

Def. (sottosuccessione)

$\{a_n\}_n$ successione reale, una successione $\{b_n\}_n$ viene detta sottosuccessione (o successione estratta) di $\{a_n\}$

se $\exists k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $\{b_n\}_n = \{a_{k_n}\}_n$ k strettamente crescente

Esempio

$$\{a_n\}_n = \left\{\frac{n}{n+3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad k_n = 2n$ $\quad b_n = a_{k_n} = a_{2n} = \frac{2n}{2n+3}$

$k_n = k(n)$

$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad h_n = n^2$ $\quad c_n = a_{h_n} = a_{n^2} = \frac{n^2}{n^2+3}$

$\{b_n\}$ e $\{c_n\}$, ovvero $\{a_{k_n}\} = \{a_{2n}\}$ e $\{a_{h_n}\} = \{a_{n^2}\}$

sono due sottosuccessioni di $\{a_n\}$

Teorema

$\{a_n\}_n$ successione reale si ha che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{se } \forall \underset{\substack{\text{crescente}\\ \text{strettamente}}}{k: \mathbb{N}\to\mathbb{N}} \quad \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$$

se $\forall \{a_{k_n}\}$ sottosuccessione di $\{a_n\}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$

dim

$\Leftarrow$ banale: $k(n) = n$ è strett. crescente, e dunque $\{a_n\}_n$ è sottosuccessione di sé stessa

$\Rightarrow$ Per ipotesi $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \\ -\infty \end{cases}$

dimostriamo il Teorema nel caso $\ell \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : \forall n > \nu \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \left(a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\right) \\ k: \mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad k \text{ strett. crescente, ovvero } k(n) \geq n\ \forall n \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : \forall n > \nu \quad k_n \geq n > \nu \quad \ell - \varepsilon < a_{k_n} < \ell + \varepsilon$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$$

$\square$

Oss: Il Teorema precedente NON è DI NESSUNA utilità per il calcolo esplicito di un limite (dovrei fare ∞ calcoli, perché $\exists \infty$ sottosuccessioni)

però

è di grande utilità per provare che una successione NON converge

Esempio Provare che $\{a_n\}_n = \{(-1)^n\}_n$ NON converge

dim

prendo la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_n = \{(-1)^{2n}\}_n = \{1\}_n$

e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

considero poi $\{a_{2n+1}\} = \{(-1)^{2n+1}\}_n = \{-1\}_n$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1$$

Ho trovato 2 sottosuccessioni di $\{a_n\}_n$ che tendono a limiti diversi

$\Rightarrow \{a_n\}_n = \{(-1)^n\}_n$ NON ha limite $\blacksquare$

OSS: la forma contronominale è la seguente

" $\{a_n\}_n$ succ reale

$\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$ <u>se</u> non ($\forall$ sottosuccessione $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$)

<u>se</u> $\exists$ 2 sottosucc, che non tendono allo stesso limite

Lemma (di riempimento)

$\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\{a_{2n}\}_n$ è t.c. $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$

$\{a_{2n+1}\}$ è t.c. $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

essendo $\{a_n\}_n = \{a_{2n}\}_n \cup \{a_{2n+1}\}_n$

Teorema Bolzano-Weierstrass

Oss: Data una successione limitata, ovvero

$a \leq a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

non è detto che questa converge.

Ad esempio

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & n \text{ è pari} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ è dispari} \end{cases}$$

ovvero $\{a_{2n}\} = \left\{\frac{2n}{2n+1}\right\}$ e $\{a_{2n+1}\} = \left\{\frac{-1}{2n+1}\right\}$

$0 < a_{2n} \leq 1 \qquad -\frac{1}{3} \leq a_{2n+1} < 0$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sicuramente $\nexists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ in quanto $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n} = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1} = 0$

$$\frac{2n}{2n+1} = \frac{\cancel{2n}}{\cancel{2n}} \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \longrightarrow 1 \qquad -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Però le sottosuccessioni sì

Oss: quando una successione è limitata

$a \leq a_n \leq b \quad \forall n$

significa che ho ∞ numeri confinati in un insieme limitato
"Sembra" che questi si "accumulino" su qualche punto: questo punto "sembra" possa essere limite di una sottosuccessione

Teorema (di Bolzano Weierstrass)

Data $\{a_n\}_n$ limitata $\Rightarrow \exists \{a_{k_n}\}_n$ convergente

dim

1°) Data $\{a_n\}_n$, esiste $\{a_{k_n}\}_n$ monotona (parte difficile)

2°) $\{a_{k_n}\}_n$ monotona $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$

↑ Teorema successioni monotone

3°) ma $a \le a_n \le b \ \forall n \Rightarrow a \le a_{k_n} \le b \ \forall n$

$\Rightarrow l \in [a,b]$

ovvero $\exists \{a_{k_n}\}$ sottosuccessione convergente ▥

Problema: come "sapere" che esiste il limite di una successione "senza calcolarlo" ??

Risposta 1: se $\{a_n\}$ è monotona, allora posso dire che $\exists$ limite anche se non lo conosco esplicitamente

E se non è monotona?

Def (successione di Cauchy)

Data $\{a_n\}_n$ successione reale, questa è detta "di Cauchy" se

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu>0 : \forall n>\nu \ \forall m>\nu \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Teorema (Converge ⇒ Cauchy)

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}$ è di Cauchy

dim

Se $\{a_n\}_n$ ha limite ℓ allora

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0 : \forall n>\nu \quad \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \\ \forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0 : \forall m>\nu \quad \ell-\varepsilon < a_m < \ell+\varepsilon \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0 \begin{cases} \forall n>\nu & \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \\ \forall m>\nu & -\ell-\varepsilon < -a_m < -\ell+\varepsilon \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0\ \forall n,m>\nu \quad -2\varepsilon < a_n - a_m < 2\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0 : \forall n,m>\nu \quad |a_n - a_m| < 2\varepsilon$$

ovvero $\{a_n\}_n$ è di Cauchy

Teorema (Cauchy ⇒ Convergente)

Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

dim

1) Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora è limitata

infatti per ipotesi

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu>0 : \forall n,m>\nu \quad -\varepsilon < a_n - a_m < +\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=1\ \exists\nu>0 : \forall n>\nu \quad m=[\nu]+1 \quad a_{[\nu]+1}-1 < a_n < a_{[\nu]+1}+1$$

$$\Rightarrow \exists K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{[\nu]}|, |a_{[\nu]+1}-1|, |a_{[\nu]+1}+1|\}$$

t.c. $|a_n| \le K \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2°) $\{a_n\}$ limitata $\xRightarrow{\text{Bolzano Weierstrass}}$ $\exists \{a_{k_n}\}$ convergente

ovvero $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell \in \mathbb{R}$

3°) Se $\begin{cases} \{a_n\}_n \text{ è di Cauchy} \\ \exists \{a_{k_n}\} \text{ convergente a } \ell \end{cases}$ allora $\{a_n\}$ converge a ℓ

Per ipotesi

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu>0 \ \forall n,m>\nu \quad |a_n-a_m|<\varepsilon \quad (1) \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu>0 \ \forall n>\nu \quad |a_{k_n}-\ell|<\varepsilon \quad (2) \end{cases}$$

$$|a_n-\ell| = |(a_n-a_{k_n})+(a_{k_n}-\ell)| \leq |a_n-a_{k_n}| + |a_{k_n}-\ell|$$

$$< 2\varepsilon$$

in quanto $n, k_n \geq n > \nu$ e dunque è vero per (1) e (2)

ma allora

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu>0 \ \forall n>\nu \quad |a_n-\ell|<2\varepsilon \qquad ////$$

Esercizio calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right)$

dim

si tratta di confrontare le velocità di
$n^{\sqrt{n}}$ e 2^n

bisogna portarle alla stessa base

$$n = e^{\log n} \Rightarrow n^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\log n} \qquad 2 = e^{\log 2} \Rightarrow 2^n = e^{n\log 2}$$

dunque

$$n^{\sqrt{n}} - 2^n = e^{\sqrt{n}\log n} - e^{n\log 2} = e^{n\log 2}\left(e^{\sqrt{n}\log n - n\log 2} - 1\right)$$

$$\Big\downarrow n\to+\infty$$

$$e^{+\infty}\cdot\left(e^{-\infty}-1\right) =$$

$$= -1\cdot+\infty = -\infty$$

Devo provare che $\sqrt{n}\log n < n \log 2 \quad \forall n > \bar{n}$

" " " $\dfrac{\sqrt{n}\log n}{n} = \dfrac{\log n}{\sqrt{n}} < \log 2 \quad \forall n > \bar{n}$

$$\boxed{\log x << x^{\alpha} << a^{x} \quad \forall a > 0}$$

per provare questo devo conoscere le proprietà di e^x

in particolare $\boxed{e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \underset{y=\log x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\sqrt{y}}} = 0$$

in quanto $e^{\sqrt{y}} = \left(e^{\frac{\sqrt{y}}{3}}\right)^3 \geq \left(1+\frac{\sqrt{y}}{3}\right)^3 \geq \frac{y^{3/2}}{27}$

$$0 \leq \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\sqrt{y}}} \leq \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{y^{3/2}} \cdot 27 = 0$$

e dunque $\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\sqrt{y}}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty} (\log x - \sqrt{x}) = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{n}} - 2^n = -\infty$ ///