Teorema (Criterio della radice)

$\{a_n\}_n \quad a_n \geq 0 \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

i) $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

ii) $1 < \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Teorema (Criterio del rapporto)

$\{a_n\}_n \quad a_n > 0 \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

i) $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

ii) $1 < \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Pb: sono collegati tra loro in qualche modo?
Sì, vale il seguente Teorema

Teorema (rapporto ⇒ radice)

$\{a_n\}_n \quad a_n > 0 \ \forall n$,
Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Pb: Il caso $\ell = 1$?
Risposta: non posso decidere nulla con i criteri del rapporto e della radice quando $\ell = 1$

Esempio $\{a_n\}_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}_n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1+1/n} = 1$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\{b_n\} = \{n\}_n$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \\ \lim_{n\to+\infty} b_n &= \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \end{aligned}\right\}$$

Quindi, se $l=1$ nel criterio rapporto/radice NON si può dedurne nulla: bisogna esaminare la successione ulteriormente

SUCCESSIONI MONOTONE

Def Data $\{a_n\}_n$ successione reale, questa si dice
monotona strett. crescente se $\forall n < m$ $a_n < a_m$

monotona debolmente crescente se $\forall n < m$ $a_n \leq a_m$
monotona strettamente decrescente se $\forall n < m$ $a_n > a_m$
monotona debolmente decrescente se $\forall n < m$ $a_n \geq a_m$

Oss: $\forall m > \bar{m}$ $a_{\bar{m}} \leq a_m \Leftrightarrow a_m \leq a_{m+1} \forall m$
infatti $\Rightarrow$ ovvio prendendo $m = \bar{m}+1$
$\Leftarrow$ $a_{\bar{m}} \leq a_{\bar{m}+1}, a_{\bar{m}+1} \leq a_{\bar{m}+2}, \dots, a_{m-1} \leq a_m \Rightarrow \forall n > \bar{m}$ $a_{\bar{m}} \leq a_n$

Oss: prese una successione $\{a_n\}$ qualsiasi,
in generale $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$

Però, se prendo una successione monotona, allora
il limite esiste

Teorema (limite successione monotona)
$\{a_n\}_n$ successione reale monotona debolmente crescente
(decrescente)
Allora, posto $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$
$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = L$

Oss: Se $\{a_n\}_n$ è strett. crescente (decrescente)
allora " " debolmente crescente (decrescente)

dim

Supponiamo $\{a_n\}_n$ debolmente crescente

1) $\begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \ell = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \\ \forall n < m & a_n \le a_m \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a)\ a_n \le \ell & \forall n \in \mathbb{N} \\ b)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : & \ell - \varepsilon < a_{\bar{n}} \\ c)\ \forall n > \bar{n} & a_{\bar{n}} \le a_n \end{cases}$

ℓ è maggiorante

ℓ è il minimo dei maggioranti

$\{a_n\}$ è deb. crescente

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \ell - \varepsilon \underset{b)}{<} a_{\bar{n}} \underset{c)}{\le} a_n \underset{a)}{\le} \ell \underset{\text{ovvio}}{<} \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$

2) $\ell = +\infty$, $\{a_n\}$ debolmente crescente

$\Leftrightarrow \begin{cases} +\infty = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \\ \forall n > \bar{n} \quad a_{\bar{n}} \le a_n \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall M \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} \quad M < a_{\bar{n}} & a) \\ \forall n > \bar{n} \quad a_{\bar{n}} \le a_n & b) \end{cases}$

$\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad M \underset{a)}{<} a_{\bar{n}} \underset{b)}{\le} a_n$

$\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad M < a_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ $\boxed{///}$

N.B. il caso in cui $\{a_n\} \searrow$ è lasciato allo studente

Teorema (definizione di e)

La successione $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è

- strettamente crescente
- superiormente limitata

Diciamo $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \,]2,3[$ il suo limite dim

- strettamente crescente

Devo provare che $\forall n$ $e_n < e_{n+1}$ (equivale a provare $\forall \bar{n} < n$ $e_{\bar{n}} < e_n$)

$$e_1 = (1+1)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = e_2$$

suppongo che (ipotesi induttiva) $e_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e_n$

Voglio provare $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}$

" " $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$

" " $\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$

" " $\left(\frac{n}{n+1}\right) < \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$

$$\underline{\underline{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}} = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) < \underline{\underline{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}}$$

Ma abbiamo $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \underset{\text{Bernoulli}}{>} 1-\cancel{(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\cancel{2}}} = 1-\frac{1}{n+1}$

e quindi $\{e_n\}_n$ è crescente strettamente

Devo provare che $\{e_n\}$ è superiormente limitata

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{Binomio Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underset{\substack{\wedge\!\!\mid \\ 1}}{\frac{n}{n}} \cdot \underset{\substack{\wedge\!\!\mid \\ 1}}{\frac{n-1}{n}} \cdot \underset{\substack{\wedge\!\!\mid \\ 1}}{\frac{n-2}{n}} \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{\wedge\!\!\mid \\ 1}}{\frac{n-k+1}{n}} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \quad \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!}$$

$2^k \leq k! \quad \forall k \geq 3$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{16}{6} + \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{8+4+2+1}{8} = \frac{64+48-45}{24} = \frac{67}{24} < 3$$

$\{e_n\}$ è strett. crescente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} e_n = \sup\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

però $\{e_n\}$ è sup. limitata da 3

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e_n = l < 3$$

Ma $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$

$$\Rightarrow 2 < l < 3$$

Esercizio

Provare che $\forall n \geq 4 \; 2^n \leq n!$

dim

$2^4 = 16 < 4! = 24$ vero!

Suppongo che $2^n \leq n!$ (ipotesi induttiva)

Devo provare $2^{n+1} \leq (n+1)!$

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{\text{ipotesi induttiva}}{\geq} 2^n \cdot (n+1) \overset{n\geq 4}{\geq} 5 \cdot 2^n > 2^{n+1}$$

Esercizio Quando $-1<q<1$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

dim

$$-1<q<1 \Rightarrow -1<-|q| \le \underbrace{q \le |q|}_{} < 1$$

$$|q|<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

per il Teorema dei carabinieri

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$$

$$-1<q<1 \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty}(1-q^{n+1})}{1-q}$$

$$\Rightarrow \quad \parallel \quad = \frac{1-\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

$$-1<q<1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \boxed{///}$$

Oss $$\sum_{k=4}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - q^0 - q^1 - q^2 - q^3$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=4}^{n} q^k = \sum_{k=4}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - 1 - q - q^2 - q^3$$

nella dim. relativa a e, $q=\frac{1}{2}$

Oss $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è della forma 1^∞

è una forma indeterminata infatti si vede il seguente

Esercizio Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ ①

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ ②

Sono limiti della forma 1^∞ **dim**

① $1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}_{} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{e} = \underline{1}$$

② $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1+n^2\cdot\frac{1}{n} = 1+n \quad \forall n\geq 1$ **Bernoulli**

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq \lim_{n\to+\infty}(1+n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty \ \blacksquare$$

Esercizio Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

dim

1ª via: utilizzare Stirling

2ª via Sia $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$