

Def (limite di $\{Q_n\}$) la successione $\{Q_n\}_n$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ e scriviamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = L$ (o $Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$)

oc $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : \forall n > \nu \quad Q_n \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$
 $L - \varepsilon < Q_n < L + \varepsilon$
 $|Q_n - L| < \varepsilon$

QND IMPORTANTE: avere limite L secondo la def significa poter fare una verifica

La definizione NON DICE COME CALCOLARE L .

Esempio (verifica)

Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in \mathbb{R}$
 dim

Devo provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \underline{\nu} = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} : \forall n > \nu \quad \underbrace{\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right|}_{< \varepsilon} < \varepsilon$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$\uparrow$ soglio

per quali n succede questo?

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \boxed{\frac{1}{\varepsilon} - 1} = \nu$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \frac{1}{\varepsilon} - 1 : \forall n > \nu \quad \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad !!$$

$\square$

Esempio $\{Q_n\}_n = \{(-1)^n\}_n$ non ha limite, ovvero
 $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$

Provaremo che $\forall L \in \mathbb{R}, L \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

2

$L = -1$ non è limite di $(-1)^n$ ovvero
non $(\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} \forall n > \nu \quad |(-1)^n + 1| < \varepsilon)$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n > \nu \quad |(-1)^n + 1| \geq \varepsilon$$

$$\exists \varepsilon = 1 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n > \nu \quad |(-1)^n + 1| \geq 1$$

$$\exists n = 2(\lfloor \nu \rfloor + 1) > \nu \quad |(-1)^{2(\lfloor \nu \rfloor + 1)} + 1| = 2 > 1 \checkmark$$

$$\exists n = 2 \max\{\lfloor \nu \rfloor, 1\}$$

$L = 1$ non è limite

$$\exists \varepsilon = 1 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n > \nu \quad |(-1)^n - 1| \geq 1$$

$$n = 2 \max\{\lfloor \nu \rfloor, 1\} + 1 \quad |(-1)^n - 1| = |-2| = 2 > 1$$

$L < -1$ non è limite

$$\exists \varepsilon = 1 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n > \nu : |(-1)^n - L| \geq 1$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \exists n = 2 \max\{\lfloor \nu \rfloor, 1\} + 1 \quad |(-1)^n - L| = L + 1 > 2 > 1$$

$-1 < L < 1$ non è limite

$$\exists \varepsilon = 1 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n > \nu \quad |(-1)^n - L| \geq 1$$

$$\begin{cases} -1 < L < 0 & \exists \varepsilon = 1 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n = 2 \max\{\lfloor \nu \rfloor, 1\} \quad |(-1)^n - L| = L + 1 > 1 \\ 0 < L < 1 & \exists \varepsilon = 1 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n = 2 \max\{\lfloor \nu \rfloor, 1\} + 1 \quad |(-1)^n - L| = L + 1 > 1 \end{cases}$$

$L < -1$ non è limite

$$\exists \varepsilon = 1 \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n > \nu \quad |(-1)^n - L| \geq 1$$

$$\exists n = 2 \max\{\lfloor \nu \rfloor, 1\} + 1 \quad |(-1)^n - L| = |-1 - L| = L + 1 > 1$$

QED

Teorema (unicità)

3

$\{Q_n\}$ succ. reale se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ allora L è unico

Se $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$ e sia $P \neq L$

se $P \neq L$ allora $\exists I(P, r), I(L, r) \quad I(P, r) \cap I(L, r) = \emptyset$

$$\begin{array}{c} P \qquad L \\ \text{-----} \\ \text{|||||} \quad \text{|||||} \end{array} \quad r = \frac{|P-L|}{2}$$

per def. $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} \forall n > \nu \quad Q_n \in I(L, \varepsilon)$

quindi anche se prendo $\varepsilon < r$

$\exists \nu \in \mathbb{R} \forall n > \nu \quad Q_n \in I(L, \varepsilon)$

ma allora : valori di Q_n che possono cadere in $I(P, r)$ sono un numero finito

$\Rightarrow P$ non può essere limite



Teorema (coda limitata)

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = L \in \mathbb{R}$, ovvero $\{Q_n\}$ convergente

allora $\{Q_n\}$ è limitata

Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} \forall n > \nu \quad L - \varepsilon < Q_n < L + \varepsilon$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{L}{2} \quad \exists \nu = \nu\left(\frac{L}{2}\right) \in \mathbb{R} \forall n > \nu \quad \frac{L}{2} < Q_n < \frac{3}{2}L}$$

da ν in poi, $\{Q_n\} \subset]\frac{L}{2}, \frac{3}{2}L[$

inoltre $K = (\max\{|Q_1|, |Q_2|, \dots, |Q_{\nu}|, |Q_{\nu}|+1\})$

si ha che, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |Q_n| \leq \max\left\{\frac{3}{2}L, K, \left|\frac{L}{2}\right|\right\} = \max\left\{\frac{3}{2}|L|, K\right\}$

Teorema (Permanenza Segno)

$\{Q_n\}_n$ succ. reale t.c. $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = L > 0$

allora $\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad Q_n > 0$

dim

1) $L \in \mathbb{R} \quad L > 0$

Per ipotesi $\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \forall n > \nu \quad L - \varepsilon < Q_n < L + \varepsilon \\ L > 0 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{L}{2} \\ L > 0 \end{array} \right. \quad \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \forall n > \nu \quad L - \frac{L}{2} < Q_n$$

$\downarrow$
 $\frac{L}{2}$
 > 0

$$\Rightarrow \exists \bar{n} = \max \{L\nu + 1, 1\} : \forall n > \bar{n} \quad Q_n > 0$$

($L = +\infty$ esercizio)



Teorema (Algebra dei Limiti)

$\{Q_n\}_n, \{b_n\}_n$ succ. reali

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l_a \in \overline{\mathbb{R}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_b \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n + b_n = l_a + l_b \quad \left(\begin{array}{l} \text{eccetto} \\ \infty - \infty \end{array} \right)$$

$$\parallel \parallel \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n \cdot b_n = l_a \cdot l_b \quad \left(\begin{array}{l} \text{eccetto} \\ 0 \cdot \infty \end{array} \right)$$

$$\parallel \parallel \parallel l_b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_n}{b_n} = \frac{l_a}{l_b} \quad \left(\begin{array}{l} \text{eccetto} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{array} \right)$$

dim

Supponiamo $l_a, l_b \in \mathbb{R}$

$$1) \forall \varepsilon > 0 \exists \nu_1 \quad \forall n > \nu_1 \quad l_a - \varepsilon < Q_n < l_a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_2 \quad \forall n > \nu_2 \quad l_b - \varepsilon < b_n < l_b + \varepsilon$$

$$\forall \nu = \max \{ \nu_1, \nu_2 \}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall n > \delta \quad \begin{cases} l_a - \varepsilon < a_n < l_a + \varepsilon \\ l_b - \varepsilon < b_n < l_b + \varepsilon \end{cases} \quad 5$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall n > \delta \quad \underline{l_a + l_b - 2\varepsilon} < a_n + b_n < \underline{l_a + l_b + 2\varepsilon}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = l_a + l_b$$

$$\text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \max\{\delta_1, \delta_2\} \quad \forall n > \delta \quad \begin{cases} l_a - \varepsilon < a_n < l_a + \varepsilon \\ l_b - \varepsilon < b_n < l_b + \varepsilon \end{cases}$$

$$|a_n + b_n - l_a - l_b| = |a_n \cdot b_n + \overset{\downarrow}{l_a} b_n - \overset{\downarrow}{l_a} b_n - \underset{\uparrow}{l_a} l_b|$$

$$= |b_n \cdot (a_n - l_a) + l_a (b_n - l_b)|$$

$$\leq |b_n| \cdot |a_n - l_a| + |l_a| \cdot |b_n - l_b|$$

$$\leq K |a_n - l_a| + |l_a| \cdot |b_n - l_b| \quad b_n \rightarrow l_b \Rightarrow b_n \text{ limit exists}$$

$$\leq K \cdot \varepsilon + |l_a| \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot (K + |l_a|)$$

$(n > \delta)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall n > \delta \quad |a_n + b_n - l_a - l_b| < \varepsilon \cdot (K + |l_a|)$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = l_a + l_b$$

$$I(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

iii) ee lo ripeto mi sono

$\square \square \square$

Esempi (con indeterminati)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+3) - \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+3-n) = 3$$

$\infty \quad - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n-2n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$$

questi Teoremi sono corollari determinati, in questo 6
della forma $\infty - \infty$. Non posso affidarmi
al Teorema dell'algebra dei limiti

$$\infty \cdot 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Teorema (dei due carabinieri)

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ successioni reali

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L$$

$$2) a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$$

dici

$$L \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \left\{ \begin{array}{l} L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \\ L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \end{array} \right. \\ \forall n > \bar{n} \quad a_n \leq b_n \leq c_n \end{array} \right.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \max\{\bar{n}, \bar{m}\} \quad \forall n > \bar{n} \left\{ \begin{array}{l} L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \\ L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \\ a_n \leq b_n \leq c_n \end{array} \right.$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \\ L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon \end{array} \right.$$

" " "

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$$



Teorema (Criterio Confronto)

7

Siano $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ successioni reali

$$1) \begin{cases} a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

$$2) \begin{cases} a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$$

$$3) \begin{cases} a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_a \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_b \end{cases} \Rightarrow l_a \leq l_b$$

diue

$$1) \begin{cases} a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \\ \forall M \in \mathbb{R} \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq \nu \quad M < a_n \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq \mathbb{R} \exists \bar{\nu} = \max\{\nu, \bar{n}\} \quad \forall n \geq \bar{\nu} \quad M < a_n \leq b_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

2) e 3) Analoghi

III

DISUGUAGLIANZA DI STIRLING 8

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{m}{e}\right)^m \leq m! \leq m \cdot e \left(\frac{m}{e}\right)^m$$

dove $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow \infty} = 2.71828 \dots \in \mathbb{R}$ *lo calcoleremo in seguito*

diver

$$\boxed{\left(\frac{m}{e}\right)^m \leq m!}$$

$$m=1 \quad \frac{1}{e} < 1 \quad \text{vera}$$

supponiamo che $\left(\frac{m}{e}\right)^m \leq m!$ (ipotesi induttiva)

voglio provare $\left(\frac{m+1}{e}\right)^{m+1} \leq (m+1)!$

equivalente a $\frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}} \leq (m+1)!$ per ipotesi induttiva $m! \geq \frac{m^m}{e^m}$

quindi mi basta provare che $\frac{(m+1)^m}{e^{m+1}} \leq \frac{m^m}{e^m}$

“ “ “ “ “ $\left(\frac{m+1}{m}\right)^m \leq e$

ma questa è vera poiché $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m \nearrow$

voglio provare $m! \leq m \cdot e \left(\frac{m}{e}\right)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$m=1 \quad 1 \leq 1 \cdot e \cdot \frac{1}{e}$ vero!

valgo per $m \quad m! \leq m \cdot e \left(\frac{m}{e}\right)^m$ (ipotesi induttiva)

voglio provare $(m+1)! \leq (m+1) \cdot e \left(\frac{m+1}{e}\right)^{m+1}$

equivalente a $m! \leq e \cdot \frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}} \leftarrow$ devo provare

ma per ipotesi ind. $m! \leq m \cdot e \cdot \frac{m^m}{e^m} \leftarrow$ lo faremo in seguito

$$\Rightarrow \text{mi basta provare che me. } \frac{n^n}{e^n} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \quad 9$$

$$\text{" " " " } n^{n+1} \cdot e \leq (n+1)^{n+1}$$

$$\text{" " " " } e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

ma quest'ultima d'ing. è vera $\forall n$ in quanto
 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente (e tende a e !)


Esercizio

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2}$ (più in generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha}$ $\forall \alpha > 0$)
 dire

$\alpha > 1$

$$\sqrt[n]{\alpha} \geq 1 \quad \text{ovvero} \quad \sqrt[n]{\alpha} = 1 + h_n \quad \text{con } h_n \geq 0$$

$$\text{ovvero} \quad \alpha = (1 + h_n)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n \cdot h_n$$

$$\text{ovvero} \quad \frac{\alpha - 1}{n} \geq h_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow_{n \rightarrow +\infty} \quad \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$$

$$0 \quad \quad 0$$

per $\alpha > 1$ $\sqrt[n]{\alpha} = 1 + h_n$

$$\text{--- -- -- -- --}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

e se $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$$

$\frac{1}{\alpha} > 1$ iper la dimostrazione precedente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} = 1$

ma (Teorema Algebrico) $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha}}$ 10

limite
rapporto

$$= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 \quad \square$$

Esercizio

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^3 + 1}{-n^2 + 1}$

dim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}}{-1 + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}}{-1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4})}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4}}{-1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} n} + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4}}{-1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2}} = +\infty \cdot \frac{1 + \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}}{-1 + \frac{1}{+\infty}}$$

$$= +\infty \cdot \frac{1}{-1} = -\infty$$

Esercizio

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^3 + 1}{3n^4 + n}$

dim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}}{-3 + \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}}{-3 + \frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}}{-3 + \frac{1}{+\infty}} = -\frac{1}{3}$$

11