2015-10-26 - An1 Gestionali - lezione 16 Lunedì 10.30÷12.30

$I(x_0,\delta) =]x_0-\delta, x_0+\delta[\equiv$ intervallo centrato in x_0 di raggio δ

Def (IMPORTANTE) $U \subseteq \mathbb{R}$ si dice "intorno di x_0" se $\exists\, I(x_0,\delta) \subseteq U$

Oss: i) $I(x_0,\delta)$ è un intorno di x_0

ii) preso $x_0 = 1$, per esempio

$]-1,2[$ è un intorno di $x_0=1$ — $]-1,2[\cup \{3\}$ ...

$]0{,}99; 1{,}01[$ è un intorno di $x_0=1$

$]1,2[$ NON È un intorno di $x_0=1$

$]-1,2[\cap \mathbb{Q}$ NON È " " " "

$\mathcal{U}_{x_0} \equiv$ insieme di TUTTI gli intorni di x_0

Intorno di $+\infty$: un insieme della forma $]a,+\infty[$ è un intorno di infinito $\forall a \in \mathbb{R}$

oppure

un insieme U che contiene $]a,+\infty[$ è un intorno di $+\infty$

Esempio $]3,+\infty[$ intorno di $+\infty$

$]1,2[\cup]5,+\infty[$ è intorno di $+\infty$

$\mathbb{Q} \cap]5,+\infty[$ NON è intorno di $+\infty$

$]-\infty,3[$ non è intorno di $+\infty$

$\mathcal{U}_{+\infty} \equiv$ insieme degli intorni di $+\infty$

Intorno di $-\infty$: un insieme del tipo $]-\infty,b[$ $b \in \mathbb{R}$ è un intorno di $-\infty$

oppure

un insieme U contenente $]-\infty,b[$ per un certo valore di b è un intorno di $-\infty$

Esempi: $]-\infty,-100[$ è un intorno di $-\infty$

$]-\infty,-1000[\,\cup\,]4,5[$ è un intorno di $-\infty$

$]7,+\infty[$ <u>non</u> <u>è</u> intorno di $-\infty$

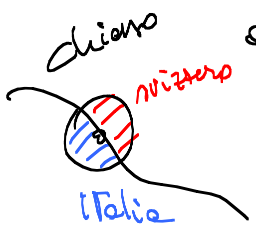
$]7,10[$ " " " " "

$]-\infty,10[\,\cap\,\mathbb{Q}$ " " " " "

$\mathcal{U}_{-\infty} \equiv$ insieme di TUTTI gli intorni di $-\infty$

Attenzione: Se cambio gli intorni, cambia tutto

la topologia è assegnata quando sono assegnati gli intorni



Def $A\subseteq\mathbb{R}$, diciamo che "x_0 punto di frontiera di A" <u>se</u> $\forall U\in\mathcal{U}_{x_0}$

$U\cap A\neq\emptyset$

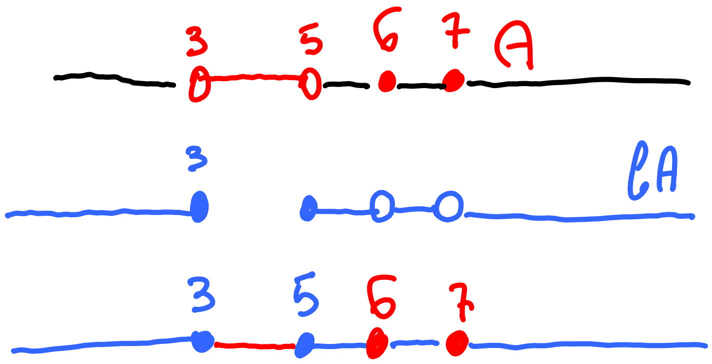
$U\cap \complement A\neq\emptyset$

Esempio $A=]3,5[\,\cup\,\{6,7\}$

$\complement A=\mathbb{R}\setminus A$

$=]-\infty,3]\cup[5,6[$

$\cup\,]6,7[\,\cup\,]7,+\infty[$



$\mathcal{F}(A)$ = frontiera di A = $\{3,5,6,7\}$

Provo che 3 è di frontiera. Prendo $]3-\delta,3+\delta[\,=I_{(3,\delta)}$

Devo verificare che $I(3,\delta)\cap A\neq\emptyset$ (i)

" $\cap\,\complement A\neq\emptyset$ (ii)

(i) si ha che $\min\left\{\frac{7}{2}, 3+\frac{\delta}{2}\right\} \in]3-\delta, 3+\delta[\cap A$, e dunque $]3-\delta[\cap A \neq \emptyset$

(ii) si ha che $\max\left\{\frac{5}{2}, 3-\frac{\delta}{2}\right\} \in]3-\delta, 3+\delta[\cap \complement A$

da cui segue $]3-\delta, 3+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

Verifichiamo che anche 5 è di frontiera, ovvero $\forall \delta$

$]5-\delta, 5+\delta[\cap A \neq \emptyset \quad]5-\delta, 5+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

(i) si ha che $\max\left\{5-\frac{\delta}{2}, \frac{9}{2}\right\} \in]5-\delta, 5+\delta[\cap A$

da cui segue $]5-\delta, 5+\delta[\cap A \neq \emptyset$

(ii) si ha che $\min\left\{5+\frac{\delta}{2}, \frac{11}{2}\right\} \in]5-\delta, 5+\delta[\cap \complement A$

da cui segue $]5-\delta, 5+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

Devo provare che $6 \in \mathcal{F}(A)$: fisso $]6-\delta, 6+\delta[$ con $\delta > 0$ arbitrario

e debbo provare $]6-\delta, 6+\delta[\cap A \neq \emptyset \quad]6-\delta, 6+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

(i) $6 \in]6-\delta, 6+\delta[\cap A \Rightarrow]6-\delta, 6+\delta[\cap A \neq \emptyset$

(ii) $\max\left\{6-\frac{\delta}{2}, \frac{11}{2}\right\} \in]6-\delta, 6+\delta[\cap \complement A \Rightarrow]6-\delta, 6+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

Devo provare che $7 \in \mathcal{F}(A)$: fisso $]7-\delta, 7+\delta[$ con $\delta > 0$ arbitrario

e debbo provare $]7-\delta, 7+\delta[\cap A \neq \emptyset \quad]7-\delta, 7+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

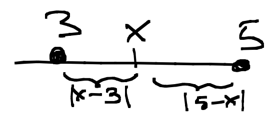
(i) $7 \in]7-\delta, 7+\delta[\cap A \Rightarrow]7-\delta, 7+\delta[\cap A \neq \emptyset$

(ii) $\max\left\{7-\frac{\delta}{2}, \frac{13}{2}\right\} \in]7-\delta, 7+\delta[\cap \complement A \Rightarrow]7-\delta, 7+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

Abbiamo provato $\{3,5,6,7\} \subseteq \mathcal{F}(A)$. Resta da provare che $\{3,5,6,7\} = \mathcal{F}(A)$, ovvero devo provare che $]-\infty,3[\cup]3,5[\cup]5,6[\cup]6,7[\cup]7,+\infty[\cap \mathcal{F}(A) = \emptyset$

- Preso $x < 3$, $x \notin \mathcal{F}(A)$ poiché preso $\delta > 0$ e $\delta < \frac{3-x}{2}$, si ha $]x-\delta, x+\delta[\subseteq \complement A$ e dunque $]x-\delta, x+\delta[\cap A = \emptyset$

- Preso $3 < x < 5$, $x \notin \mathcal{F}(A)$ poiché preso $\delta > 0$ t.c.



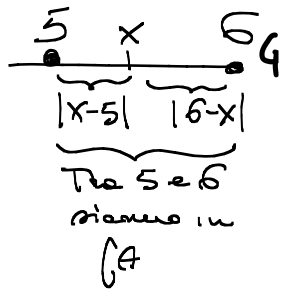
$\delta = \frac{1}{2}\min\{|x-3|, |5-x|\}$ si ha

$]x-\delta, x+\delta[\subseteq A \Rightarrow]x-\delta, x+\delta[\cap \complement A = \emptyset$

Preso $5<x<6$, $x \notin \mathcal{F}(A)$ poiché preso $\delta>0$

$\delta = \frac{1}{2}\min\{|x-5|, |6-x|\}$ si ha

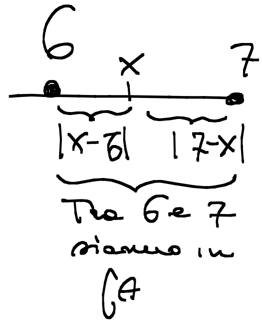
$]x-\delta, x+\delta[\subseteq \complement A \Rightarrow]x-\delta, x+\delta[\cap A = \emptyset$



Preso $6<x<7$, $x \notin \mathcal{F}(A)$ poiché preso $\delta>0$

$\delta = \frac{1}{2}\min\{|x-6|, |7-x|\}$ si ha

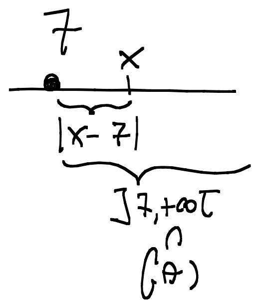
$]x-\delta, x+\delta[\subseteq \complement A \Rightarrow]x-\delta, x+\delta[\cap A = \emptyset$



Preso $7<x$, $x \notin \mathcal{F}(A)$ poiché preso $\delta>0$,

$\delta = \frac{1}{2}|x-7|$ si ha

$]x-\delta, x+\delta[\subseteq \complement A \Rightarrow]x-\delta, x+\delta[\cap A = \emptyset$



Oss: Per come è definita,

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\complement A)$$

A partire dalla frontiera possiamo definire chiusi, aperti e quindi individuare la topologia

Alcune proprietà degli intorni

1) $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ e $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_{x_0}$

banale: $U \in \mathcal{U}_{x_0} \Rightarrow \exists\, I(x_0,\delta) \subseteq U$ ma $U \subseteq V \Rightarrow I(x_0,\delta) \subseteq V$

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}_{x_0}$ (questa dimostrazione è fatta per $x_0 \in \mathbb{R}$; se $x_0 = \pm\infty$ va adattata in modo elementare

2) $U, V \in \mathcal{U}_{x_0} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_{x_0}$

infatti $U, V \in \mathcal{U}_{x_0} \Rightarrow \exists\, I(x_0,\delta) \subseteq U$ e $I(x_0,r) \subseteq V$

$\Rightarrow I(x_0,\delta) \cap I(x_0,r) = I(x_0,R) \subseteq U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_{x_0}$

dove $R = \min\{\delta, r\}$

3) $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_{x_1}$ $V \in \mathcal{U}_{x_2}$ con $U \cap V = \phi$

infatti, preso $r = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$, si ha che

$$I(x_1, r) \in \mathcal{U}_{x_1} \quad I(x_2, r) \in \mathcal{U}_{x_2} \quad e \quad I(x_1, r) \cap I(x_2, r) = \phi$$

Def. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice "chiuso"
se $\mathcal{J}(A) \subseteq A$

Dato un insieme A, diciamo "Chiusura di A" l'insieme
$\overline{A} = A \cup \mathcal{J}(A)$

Oss: $A = [0,1]$ è chiuso, in quanto $\mathcal{J}(A) = \{0,1\} \subseteq [0,1]$

ii) $A = [0,3[$ non è chiuso, " " $3 \in \mathcal{J}(A)$ $3 \notin [0,3[$

iii) $A = [0,1] \cup \{3\}$ è chiuso $\mathcal{J}(A) = \{0,1,3\} \subseteq A$

Def. Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto
se $\complement A$ è chiuso

Diciamo $\mathring{A}$ = interno di $A = A \setminus \mathcal{J}(A)$

Teorema (non dimostrato)

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \phi$ $\quad \overline{A} = A \cup \mathcal{J}(A)$ è chiuso

$\mathring{A} = A \setminus \mathcal{J}(A)$ " aperto

Oss: 1) $A =]0,1[$ è aperto poiché $\complement A =]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$ è chiuso

2) $A =]0,10]$ non è aperto né chiuso

$\mathcal{F}(A) = \{0,10\} \not\subseteq A$ e quindi A non è chiuso

ma $\complement A =]-\infty,0] \cup]10,+\infty[$

e $\mathcal{F}(\complement A) = \{0,10\} \not\subseteq \complement A$ e quindi $\complement A$ non è chiuso

Proprietà 1) $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\complement A)$ ~~forte~~ bordo

2) Dato A, $\overline{A}$ è un insieme chiuso

3) Dato A, $A \setminus \mathcal{F}(A)$ è aperto ($\complement(A \setminus \mathcal{F}(A)) = \complement(A) \cup \mathcal{F}(A) = \overline{\complement A}$ quindi è chiuso)

Def: Dato un insieme A, diciamo che "x_0 è interno ad A" se $\exists I(x_0,\delta) \subseteq A$

$\mathring{A} \equiv$ insieme dei punti interni

Teorema $\mathring{A} = \overline{A} \setminus \mathcal{F}(A)$

$\mathring{A}$ aperto

Teorema

A aperto $\Rightarrow \forall x \in A \quad A \in \mathcal{U}_x$

dim

A aperto $\Rightarrow A = \mathring{A} \Rightarrow \forall x \in A \ \exists I(x,r) \subseteq A$ e $I(x,r) \in \mathcal{U}_x$

$\Rightarrow A \in \mathcal{U}_{x_r}$ [III]

Oss: Dato $\mathcal{F}(A)$,

$x \in \mathcal{F}(A)$ se $\forall U \in \mathcal{U}_x \quad U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap \complement A \neq \emptyset$

$x \notin \mathcal{F}(A)$ se non $(\forall U \in \mathcal{U}_x \quad U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap \complement A \neq \emptyset)$

se $\exists U \in \mathcal{U}_x \quad U \cap A = \emptyset$ o $U \cap \complement A = \emptyset$

se $\exists U \in \mathcal{U}_x \quad U \subseteq A$ o $U \subseteq \complement A$

Esempio $A =]0,4[\cup \{5\}$ calcolare $\mathcal{F}(A)$, $\bar{A}$, $\mathring{A}$

Non è difficile provare (vedi esercizio precedente) che

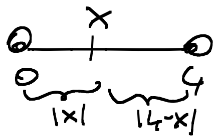
$$\mathcal{F}(A) \supseteq \{0,4,5\}.$$

Inoltre $\forall x < 4$, $\exists \delta = \frac{|4-x|}{2}$: $I(x,\delta) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow x \in \complement A$

Inoltre $\forall x \in]0,4[$ $\exists \delta = \frac{1}{2}\min\{|x-0|, |4-x|\}$

t.c. $I(x,\delta) \subseteq A \Rightarrow x \in \mathring{A} \Rightarrow x \notin \mathcal{F}(A)$



Inoltre $\forall x \in]4,5[$ $\exists \delta = \frac{1}{2}\min\{|x-4|, |5-x|\}$

t.c. $I(x,\delta) \subseteq \complement(A) \Rightarrow x \in \mathring{\overbrace{\complement(A)}} \Rightarrow x \notin \mathcal{F}(A)$

Infine $\forall x \in]5,+\infty[$ $\exists \delta = \frac{1}{2}|x-5|$ t.c. $I(x,\delta) \subseteq \complement(A)$

$\Rightarrow x \in \mathring{\overbrace{\complement(A)}} \Rightarrow x \notin \mathcal{F}(A)$

Dunque $\mathring{A} =]0,4[$, $\mathring{\overbrace{\complement A}} =]-\infty,4[\cup]4,5[\cup]5,+\infty[$

$\bar{A} = [0,4] \cup \{5\}$ $\quad \mathcal{F}(A) = \{0,4,5\}$

Def Dato un insieme A, $x_0 \in A$ si dice

PUNTO ISOLATO

se $\exists I(x_0,\delta)$ t.c. $I(x_0,\delta) \cap A = \{x_0\}$ $\quad *$

Oss: se $x_0 \in \mathring{A}$ allora x_0 <u>non è</u> isolato

infatti $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists I(x_0,\delta) \subseteq A \Rightarrow \nexists U \in \mathcal{U}_{x_0} : U \cap A = \{x_0\}$

Def (Punto di accumulazione)

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0$ è p.d.a. (punto di accumulazione) per A

se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $(U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Oss: $x \in \mathring{A} \Rightarrow x \in D(A)$ = insieme pti di accumulazione di A

ovvero $\mathring{A} \subseteq D(A)$

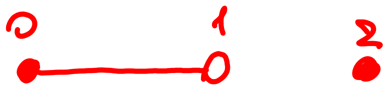
basta: $x_0 \in \mathring{A} \Rightarrow \exists I(x_0,r) \subset A \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$

$U \cap I(x_0,r) \in \mathcal{U}_{x_0}$ e $U \cap I(x_0,r) \subseteq I(x_0,r) \subseteq A$

$\Rightarrow U \cap A \supseteq U \cap I(x_0,r) \Rightarrow (U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Esempio Trovare p.ti isolati e di accumulazione per
$A = [0,1[\cup \{2\}$

dim



$0, 1, 2 \in \mathcal{F}(A)$

$x \in]0,1[\Rightarrow x \in \mathring{A} \Rightarrow x \in \mathcal{D}(A)$

$x < 0 \Rightarrow \exists\, I(x,\delta)\quad \delta = \frac{|x|}{2} : I(x,\delta) \subset \complement A$

$x \in]1,2[\Rightarrow \exists\, I(x,\delta)\quad \delta = \frac{1}{2}\min\{|x-1|, |2-x|\}\quad I(x,\delta) \subseteq \complement A$

$x \in]2,+\infty[\Rightarrow \exists\, I(x,\delta)\quad \delta = \frac{1}{2}|x-2| : I(x,\delta) \subseteq \complement A$

$x = 0 \in \mathcal{D}(A) : \forall \delta > 0\quad \exists\, x_0 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\} \in (I(0,\delta) \cap A) \setminus \{0\}$

$x = 1 \in \mathcal{D}(A) :$ " $\exists\, x_0 = \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{\delta}{2}\} \in (I(1,\delta) \cap A) \setminus \{1\}$

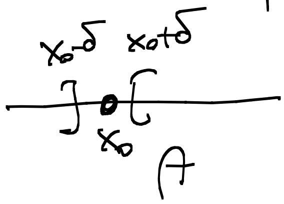
$x = 2$ punto isolato : $\exists\, \delta = \frac{1}{2}$ t.c. $I(2, \frac{1}{2}) \cap A = \{2\}$

OSS $\overline{A} = \{$Punti di accumulazione$\}$
$\cup \{$Punti isolati$\}$

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in$ Interno di $A = \mathring{A}$
allora x_0 è p.to di accumulazione per A

dim

per ipotesi $\underline{\exists\, I(x_0,\delta) \subseteq A}$



TS $\forall \bar{\delta}$ $\left(I(x_0,\bar{\delta}) \cap A\right) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Considero $r = \min\{\delta, \bar{\delta}\}$
si ha dunque che

$$I(x_0, r) \subset I(x_0,\delta) \cap I(x_0,\bar{\delta}) \subseteq I(x_0,\delta) \subseteq A$$

$\Rightarrow x_0 + \frac{r}{2} \in \left(A \cap I(x_0,\bar{\delta})\right) \setminus \{x_0\}$ che è la Tesi ∎

Pb: Se A è finito allora A possiede p.d.a.?
No in quanto, se è finito, ogni punto è isolato

$$\overset{1}{\bullet} \quad \overset{2}{\bullet} \quad \overset{3}{\bullet} \quad \overset{4}{\bullet} \quad \overset{5}{\bullet} \quad \overset{6}{\bullet}$$

Pb $\mathbb{N}$ ha punti di accumulazione?

$$\overset{1}{\bullet} \quad \overset{2}{\bullet} \quad \overset{3}{\bullet} \quad \overset{4}{\bullet} \; \text{---} \; \overset{n}{\bullet} \; \text{-----}$$

$\mathbb{N}$ è infinito, e $\forall n \in \mathbb{N}$, n è isolato
ma $+\infty$? è di accumulazione per $\mathbb{N}$
SI
infatti, preso $]a,+\infty[\in \mathcal{U}_{+\infty}$ si ha che

$$\forall a > 0 \qquad]a,+\infty[\cap \mathbb{N} \neq \emptyset$$

e dunque $+\infty \in D(\mathbb{N})$, cioè è di accumulazione

Def Diciamo che $\{a_n\}_n$ è una successione reale se $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funzione $f(n) = a_n$

Esempio

1) $\{S_n\} = \{(1+2 \cdots + n)\}_n = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}_n$ è una successione

2) $\{(-1)^n\} = \{-1,+1,-1,+1,\dots\}_n$ è una successione

3) $\left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_n$ NON è una successione in quanto non è definita per n dispari

4) $\left\{\frac{1}{1+(-1)^{2n}}\right\}_n$ è una successione

Def (limite di una successione)

$\{a_n\}_n$ successione reale, diciamo che a_n ha limite $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

se

$$\begin{cases} L \in \mathbb{R} & \forall I(L,\varepsilon) \ \exists \nu \in \mathbb{R} : \forall n > \nu \quad a_n \in I(L,\varepsilon) \\ L = +\infty & \forall]a,+\infty[\ \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \forall n > \nu \quad a_n \in]a,+\infty[\\ L = -\infty & \forall]-\infty,b[\ \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \forall n > \nu \quad a_n \in]-\infty,b[\end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = L}$$

$$L \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \forall n > \nu \quad \overbrace{|a_n - L| < \varepsilon}^{a_n \in I(L,\varepsilon)}$$

$$L \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \forall n > \nu \quad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$