2015-10-22-

Esercizio Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$z^3\bar{z}+3z^2-4=0$$

dim

Osserviamo che sostituire $z=a+ib$ conduce ad una eq. di 4 grado, che in generale è complesso risolvere (a meno che non sia biquadratica o qualche altro caso speciale)

$$z^2\cdot(z\cdot\bar{z})+3z^2-4=0$$

$$z^2|z|^2+3z^2-4=0$$

voglio portare l'equazione alla forma $z^2=$ n.ro reale

ovvero

$$z^2(|z|^2+3)=4$$

ovvero $z^2=\dfrac{4}{|z|^2+3}>0$ (*)

osservo che $\left|\dfrac{4}{|z|^2+3}\right|=\dfrac{4}{|z|^2+3}$ e dunque, passando ai moduli in ambo i membri di (*) trovo

$$|z|^2=\frac{4}{|z|^2+3}$$ questa è un'equazione reale con incognita $|z|$

$\Rightarrow |z|^4+3|z|^2-4=0 \Rightarrow (|z|^2+4)(z^2-1)=0$

$\Rightarrow \cancel{|z|^2=-4}$ o' $|z|^2=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$ o' $\cancel{|z|=-1}$

Abbiamo ottenuto che "necessariamente" $|z|=1$

L'equazione di partenza era

$z^2\cdot|z|^2+3z^2-4=0$ ma $|z|=1$

$\Rightarrow z^2+3z^2-4=0 \Rightarrow 4z^2=4 \Leftrightarrow z^2=1$

dunque le soluzioni cercate sono $z_1=1$ e $z_2=-1$

Oss: l'equazione era di 4° grado: perché ho trovato "solo" due soluzioni?

l'equazione è

$$\underbrace{z^3 \cdot \bar{z} + 3z^2 - 4}_{} = 0$$

non è un polinomio nelle potenze di z

$\Rightarrow$ non vale il Teorema fond. dell'algebra

e dunque non è detto che

n.ro soluzioni = grado dell'eq.

Esercizio Determinare tutte le sol. di $|z|^2 = 1$

dim

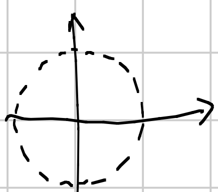
l'eq. è di secondo grado e diventa, posto $z = a + ib$

$$a^2 + b^2 = 1$$

Quante soluzioni ha? $(0,1)$ $(1,0)$ $(-1,0)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ho ∞ soluzioni poiché $a^2 + b^2 = 1$ è l'eq. della circonferenza di raggio 1 centrata in $z = 0$,

e quindi



Esercizio Determinare tutte le soluzioni di

$$z|z| - 2z - i + 1 = 0$$

dim

Il grado è 2, quindi "può aver senso" tentare di risolvere l'equazione sostituendo $z = a + ib$

$$(a+ib) \cdot (a^2+b^2)^{1/2} - 2(a+ib) - i + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{a^2+b^2} - 2a + 1 = 0 \\ b\sqrt{a^2+b^2} - 2b - 1 = 0 \end{cases}$$

$z = 0$ non è soluzione

$z = a$ " " " $\forall a \in \mathbb{R}$

$z = ib$ " " " $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} a\left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right) = -1 \\ b\left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right) = -\frac{1}{a} \\ \left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right) = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{b} = -\frac{1}{a} \\ / \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ b\sqrt{a^2+b^2}-2b-1=0 \end{cases}$$

devo risolvere

$$\boxed{\sqrt{b^2}=|b|}$$

$$b\sqrt{(-b)^2+b^2}-2b-1=0$$

$$b\sqrt{2b^2}-2b-1=0$$

$$\sqrt{2}\,b|b|-2b-1=0$$

$$\begin{cases} b>0 \quad \sqrt{2}b^2-2b-1=0 \quad b_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \nearrow \frac{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\ \searrow \cancel{\frac{1-\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \text{ è} <0! \end{matrix} \\ \text{o} \\ b<0 \quad +\sqrt{2}b^2+2b+1=0 \quad b_{3,4}=\cancel{\frac{-1\pm\sqrt{1-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \end{cases}$$

Dunque ho trovato la soluzione

$$b=\frac{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \qquad a=-\frac{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

cioè

$$z=\frac{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

<u>x casa</u>: verificare sostituendo in $z|z|-2z-i+1=0$

Esercizio Determinare tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} 3z-2i\bar{z}=\omega \quad \leftarrow \omega=f(z,\bar{z}) \\ 12\omega+8i\bar{\omega}=(13i-2z)(13i+2z) \end{cases}$$

dim

In questo sistema, sostituire $z=a+ib$ e $\omega=c+id$ non è vincente come tattica

Conviene sostituire $\omega=f(z,\bar{z})$ nella seconda eq e trovo

$$12\left(3z-2i\bar{z}\right)+i\cdot 8\cdot\left(3\bar{z}-2\bar{i}\cdot\bar{\bar{z}}\right)=13^2\cdot i^2-4z^2$$

$$36z-24i\bar{z}+8i\left(3\bar{z}+2iz\right)=-169-4z^2$$

$$36z - \cancel{24i\bar{z}} + \cancel{24i\bar{z}} - 16z + 169 + 4z^2 = 0$$

$$4z^2 + 20z + 169 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-676}}{4} = \frac{-10 \pm \sqrt{-576}}{4} =$$

$$= \frac{-10 \pm 24i}{4} = \begin{cases} -\frac{5}{2} - 6i = z_1 \\ -\frac{5}{2} + 6i = z_2 \end{cases}$$

Sostituendo in

$$3z - 2i\bar{z} = w$$

trovo

$$z_1 = -\frac{5}{2} - 6i \longrightarrow w_1 = 3\left(-\frac{5}{2} - 6i\right) - 2i\left(-\frac{5}{2} + 6i\right)$$

$$= -\frac{15}{2} + 12 + i(-18+5)$$

$$= \frac{9}{2} - 13i$$

$$z_2 = -\frac{5}{2} + 6i \longrightarrow w_2 = 3\left(-\frac{5}{2} + 6i\right) - 2i\left(-\frac{5}{2} - 6i\right)$$

$$= -\frac{15}{2} - 12 + i(18+5)$$

$$= -\frac{39}{2} + 23i$$

Esercizio Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2z^2 - w = 1 \\ zw = 1 \end{cases}$$

dim

$zw = 1$ $\quad z \neq 0$ e $w \neq 0$ $\Rightarrow$ $z = \frac{1}{w}$ sostituisco nella 1ª equazione e trovo

$$2\frac{1}{w^2} - w = 1 \iff -w^3 - w^2 + 2 = 0$$

$$2 - w^3 = w^2 \iff w^3 + w^2 - 2 = 0$$

Teorema (di Ruffini)

Dato un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{C}$

Se $P(z) = 0$ allora $(x - z)$ divide $P(x)$

Nel nostro caso $P(\omega) = \omega^3 + \omega^2 - 2$ e si ha $P(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

allora $(\omega - 1)$ divide P e quindi

$$
\begin{array}{rrr|l}
\omega^3 + \omega^2 & & -2 & \omega - 1 \\
\omega^3 - \omega^2 & & & \omega^2 + 2\omega + 2 \\
\hline
// \;\; 2\omega^2 & & -2 & \\
2\omega^2 & -2\omega & & \\
\hline
// & 2\omega & -2 & \\
 & 2\omega & -2 & \\
\hline
 & & // &
\end{array}
$$

$$\boxed{\omega^3 + \omega^2 - 2 = (\omega - 1)(\omega^2 + 2\omega + 2) = 0}$$

$$\omega^2 + 2\omega + 2 = 0 \iff \omega_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 - 2} \quad \begin{cases} -1 - i = \omega_2 \\ -1 + i = \omega_3 \end{cases}$$

$$\omega_1 = 1 \longrightarrow z_1 = \frac{1}{\omega_1} = 1$$

$$\omega_2 = -1 - i \longrightarrow z_2 = \frac{1}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\omega_3 = -1 + i \longrightarrow z_3 = \frac{1}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

Esercizio Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4|z|^2 + \omega^2 = 1/3 \\ z \cdot \dfrac{\overline{\omega}}{\omega} + 2\overline{z} = i \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} C.E \\ \omega \neq 0 \end{array}}$$

dim

$$\omega^2 = \frac{1}{3} - 4|z|^2 \overset{\text{deduco}}{\Longrightarrow} \omega^2 \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \omega \in \mathbb{R} \\ \text{o} \\ \omega = ib \quad \text{con } b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1) $\omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \omega = a \quad a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} w = a \neq 0 \\ a^2 = \frac{1}{3} - 4|z|^2 \\ z \cdot \frac{\bar{a}}{a} + 2\bar{z} = i \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{a} = a$$

$$\begin{cases} w = a \neq 0 \\ a^2 = \frac{1}{3} - 4|z|^2 \\ z + 2\bar{z} = i \end{cases} \qquad z = c + id \qquad c + id + 2(c - id) = i$$

$$\begin{cases} 3c = 0 \\ -d = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{z = -i}$$

$$\cancel{\begin{cases} w = a \neq 0 \\ a^2 = \frac{1}{3} - 4 \\ z = -i \end{cases}} \qquad a^2 = -\frac{11}{3} \text{ non hanno radici reali}$$

2°
$$\begin{cases} w = ib \\ (ib)^2 = \frac{1}{3} - 4|z|^2 \\ z \cdot \frac{\overline{ib}}{ib} + 2\bar{z} = i \end{cases} \qquad \begin{cases} / \\ / \\ z \, \frac{-ib}{ib} + 2\bar{z} = i \end{cases}$$

$-z + 2\bar{z} = i$ $\qquad z = c + id$ sostituisco e trovo

$-(c+id) + 2(c - id) = i \iff c + i(-d - 2d - 1) = 0$

$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ 3d = -1 \end{cases} \iff z = -\frac{i}{3}$$ ritorno al sistema

$$\begin{cases} w = ib \\ (ib)^2 = \frac{1}{3} - 4\left(\left|-\frac{i}{3}\right|^2\right) \longrightarrow -b^2 = \frac{1}{3} - 4\,\frac{1}{9} \\ z = -\frac{i}{3} \end{cases}$$

$$b^2 = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\left|-\frac{i}{3}\right| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \qquad b = \pm\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} w = ib = i \cdot \left(\pm\frac{1}{3}\right) \\ z = -\frac{i}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (z_1, w_1) = \left(-\frac{i}{3}, \frac{i}{3}\right) \\ (z_2, w_2) = \left(-\frac{i}{3}, -\frac{i}{3}\right) \end{array}}$$

Esercizio x casa: verificare sostituendo

Prossimo argomento $\boxed{\text{SUCCESSIONI}}$

Def diciamo che $\{a_n\}_n$ è una successione reale se $a_n = f(n)$ con $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funzione

L'insieme dei valori di $\{a_n\}_n$ è

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\}$$

Esempio

i) $a_n = 1/n \quad n = 1, 2, 3, \dots$ è una successione

ii) $a_n = \dfrac{1}{1+(-1)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$ non è una successione poiché non è definita $\forall n$ dispari

In una successione, matematicamente è interessante conoscerne il comportamento asintotico, ovvero conoscerne il $\lim_{n \to +\infty} a_n$

Def Data $\{a_n\}_n$ successione reale, diciamo che $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è il limite per $n \to +\infty$ di a_n se

$$\forall \underbrace{(\text{intorno di } l)} \ \exists \bar{n} > 0 \ : \ \forall n > \bar{n} \quad a_n \in (\text{intorno di } l)$$

"Il LIMITE È UNA VERIFICA"