2015-10-20 - An1Gest - lezione 14

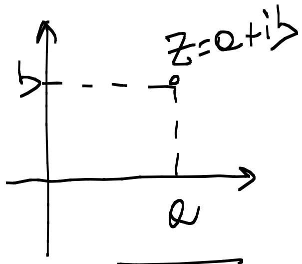
martedì 8.30÷10.30 1

$\mathbb{C} = \{ \underbrace{z = a+ib}_{\text{forma algebrica}} \; : \; a,b \in \mathbb{R} \}$ dove $i \, : \, i^2 = -1$

$a = \operatorname{Re} z$ parte reale

$b = \operatorname{Im} z$ " immaginaria

$a, b \in \mathbb{R}$

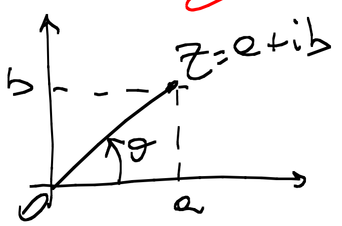


$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ = modulo di z

$\bar{z}$ = coniugato di z quel numero t.c. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$

$\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$

Forma Trigonometrica o polare di $z \in \mathbb{C}$



$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ = lunghezza del vettore $(z-0)$

θ = minimo angolo (verso antiorario) formato da $(z-0)$ con semiasse reale positivo

modulo ↓ argomento ↓

$\rho, \theta \longrightarrow$ individuano univocamente

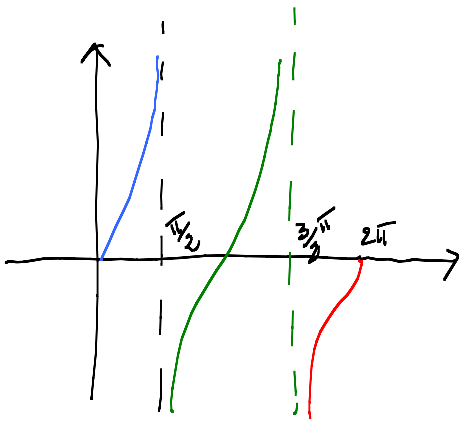
$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$
$= a + ib$

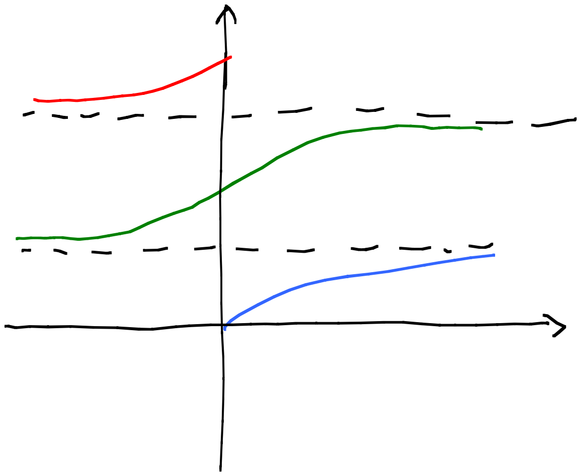
$a = \rho\cos\theta \quad b = \rho\sin\theta$

viceversa

assegno $z=a+ib$ $\longrightarrow$ voglio trovare $\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\theta=\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & a,b>0 \quad \text{1° quadrante} \\ \frac{\pi}{2} & a=0 \; b>0 \\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a} & a<0 \quad \text{2° e 3° quadrante} \\ \frac{3}{2}\pi & a=0 \; b<0 \\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a} & a>0 \; b\le 0 \quad \text{4° quadrante} \end{cases}$$





$$\rho,\theta \longleftrightarrow z=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta) \qquad \forall z\neq 0$$

La somma si interpreta con la regola del parallelogramma

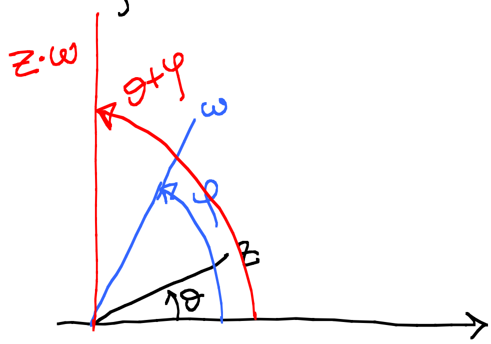
Interpretazione del prodotto (geometrico)

$$z=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta) \qquad \omega=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$$

$$z\cdot\omega=\rho\cdot r\cdot(\cos\theta\cos\varphi+i\cos\theta\operatorname{sen}\varphi+i\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+i^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)$$

$$=\rho\cdot r\cdot\left(\underbrace{\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}+i\,(\underbrace{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi})\right)$$

$$=\rho\cdot r\,(\cos(\theta+\varphi)+i\operatorname{sen}(\theta+\varphi))$$



$$|z\cdot\omega|=\rho\cdot r$$

$$\arg(z\cdot\omega)=\theta+\varphi$$
$$=\arg z+\arg\omega$$

Problema calcolare $(1+i)^{100}$

per ora, se voglio fare questo calcolo devo riformi al Binomio di Newton e quindi calcolare

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cdot 1^{100-k} \cdot (i)^k = 1 + \text{auguri}$$

Teorema (formula di De Moivre)

Dato $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, $\quad n \in \mathbb{N}$

allora

$$z^n = \rho^n\left(\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta)\right)$$

Oss:

$z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \qquad w = z$

$$z^2 = \rho^2 \cdot \left(\cos\vartheta\cos\vartheta + i \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + i^2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\right)$$

$$= \rho^2 \left(\cos\vartheta\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta + i\left(\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\right)\right)$$

$$= \rho^2 \left(\cos(2\vartheta) + i \operatorname{sen}(2\vartheta)\right)$$

dim formula di De Moivre (per induzione su n)

$n=1$ $\quad z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \quad z^1 = \rho^1(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ <u>Vero</u>

Suppongo (ipotesi induttiva) che $z^n = \rho^n\left(\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta)\right)$

Voglio provare che $z^{n+1} = \rho^{n+1}\left(\cos[(n+1)\vartheta] + i \operatorname{sen}[(n+1)\vartheta]\right)$

procedo

$$z^{n+1} = z \cdot z^n \overset{\text{ipotesi induttiva}}{=} \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \cdot \rho^n\left(\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta)\right)$$

$$= \rho^{n+1}\left(\cos\vartheta\cos(n\vartheta) + i\cos\vartheta\operatorname{sen}(n\vartheta) + i \operatorname{sen}\vartheta\cos(n\vartheta) + i^2 \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}(n\vartheta)\right)$$

$$= \rho^{n+1}\left(\underbrace{\cos\vartheta\cos n\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}(n\vartheta)} + i\underbrace{\left(\cos\vartheta\operatorname{sen}(n\vartheta) + \operatorname{sen}\vartheta\cos(n\vartheta)\right)}\right)$$

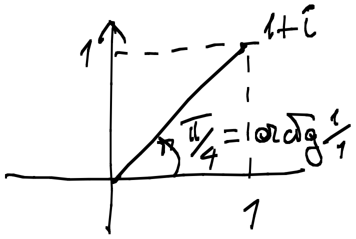
$$= \rho^{n+1}\left(\cos[(n+1)\vartheta] + i \operatorname{sen}[(n+1)\vartheta]\right)$$

$\blacksquare$

voglio calcolare $(1+i)^{100}$

1) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ho scritto la forma trigonometrica di $z = 1+i$



$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

2) Applico De Moivre e si ha

$$(1+i)^{100} = \left[\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100} \overset{\text{De Moivre}}{=} (\sqrt{2})^{100}\cdot\left(\cos\left(100\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(100\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{50}\left(\cos(25\pi)+i\sin(25\pi)\right) = 2^{50}\left(\cos(\overset{12\cdot 2\pi}{24\pi}+\pi)+i\sin(24\pi+\pi)\right)$$

$$= 2^{50}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2^{50}$$

RADICI n-esime di $z \in \mathbb{C}$

Def Dato $w \in \mathbb{C}$, z si dice "radice n-esima di w" con $n \in \mathbb{N}$ $n > 1$ se $z^n = w$

Esempio $z = i$ è radice quadrata di $w = -1$
$z = -i$ " " " " $w = -1$

$z = 2$ " " cubica di $w = 8$

Oss preso $x \in \mathbb{R}$, di radici dispari ne trovo 1 sola

di radici pari ne trovo
- 2 se $x > 0$
- 1 se $x = 0$
- nessuna se $x < 0$

infatti, preso per esempio:
- $x = -8$ si trova $\sqrt[3]{-8} = -2$ (in $\mathbb{R}$ è l'unica)
- $x = -8$ non ho radici quadrate in $\mathbb{R}$
- $x = 8$ ho 2 radici quadrate in $\mathbb{R}$ $\pm 2\sqrt{2}$

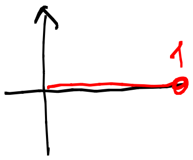
in particolare, in $\mathbb{R}$ $x^{1000} = 3$
ha 2 soluzioni che sono $\pm 3^{1/1000}$

Teorema (Radici n-esime in $\mathbb{C}$)
Dato $\omega = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ ed $n \in \mathbb{N}$
allora esistono n radici $\neq$ di ω in $\mathbb{C}$ date da

$$z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Esempio Calcolare le radici cubiche di 1
dim

$1 = 1\cdot(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$



$|1| = 1$
$\arg 1 = 0$

$$z_k = 1^{1/3}\left(\cos\left(\frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$z_0 = \cos\left(\frac{0}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{3}\right) = 1$ non mi sorprende: 1 è la radice cubica reale di 1

$$z_1 = \cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{0}{3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$z_1^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \checkmark$$

Verificate che $z_2^3 = 1$

dim

$\omega = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ se $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ è radice n-esima
allora $z^n = \omega$ ma, per la formula di de Moivre

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)) = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) = \omega$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} r^m = \rho \\ \cos m\varphi = \cos\vartheta \\ \operatorname{sen} m\varphi = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \rho^{1/m} \\ m\varphi = \vartheta + 2\pi \cdot h \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z}$$

radice reale: sono n.ri reali > 0

$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/m} \\ \varphi = \frac{\vartheta}{m} + \frac{2\pi}{m} \cdot h \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z}$$

"sembra" che ho trovato ∞ radici

$h > 0 \qquad h = s \cdot m + k \qquad 0 \le k \le m-1$

$h < 0 \qquad -h = s \cdot m + k \qquad 0 \le k \le m-1$

$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/m} \\ \varphi = \frac{\vartheta}{m} + \frac{2\pi}{m} \cdot k + \boxed{s \cdot 2\pi} \end{cases} \quad s \in \mathbb{Z} \quad k = 0, 1, 2, \dots m-1$$

ho individuato m radici in corrispondenza a

$$\begin{cases} r = \rho^{1/m} \\ \varphi_k = \frac{\vartheta}{m} + \frac{2\pi}{m} \cdot k \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

e dunque

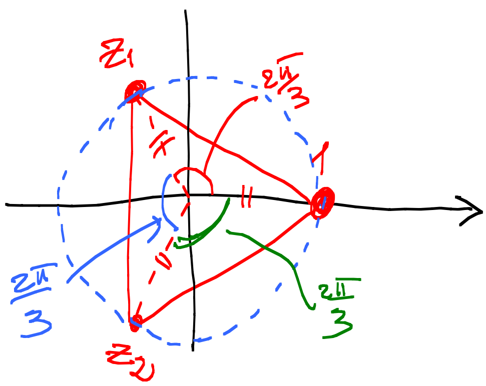
$$z_k = \rho^{1/m}\left(\cos\varphi_k + i \operatorname{sen}\varphi_k\right) \quad k = 0, \dots, m-1$$

ovvero

$$z_k = \rho^{1/m}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{m} + \frac{2\pi}{m}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{m} + \frac{2\pi}{m} \cdot k\right)\right) \quad k = 0, \dots, m-1 \qquad ▥$$

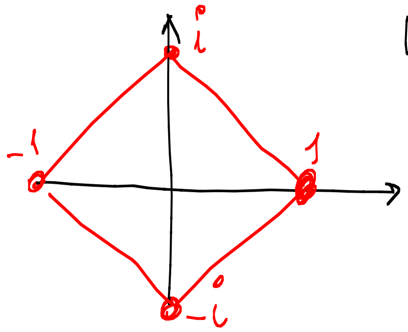
Oss: (interpretazione geometrica delle radici n-esime)

$w = 1 \qquad \sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$



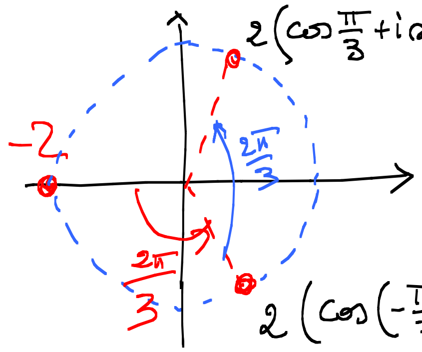
Il triangolo formato è equilatero

$w = 1 \qquad$ e considero $\sqrt[4]{1} = \left\{i, -1, -i, 1\right\}$



ho trovato un quadrato

Se devo calcolare la $\sqrt[3]{-8}$, osservo che si dispongono come un triangolo equilatero sulla circonferenza di raggio $|8|^{1/3} = 2$ e ricordando che -2 è una radice cubica di -8 si ha



$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Esercizio Calcolare tutte le soluzioni di $z^4 = |z|^2 + 2$

dim

Sostituendo $z = a + ib$ complichiamo il tutto in quanto compaiono le potenze 4 di z

Conviene osservare che

$$z^4 = |z|^2 + 2 \implies |z^4| = \left| |z|^2 + 2 \right|$$

$$\implies |z|^4 = |z|^2 + 2 \qquad \text{in quanto } |z|^2 + 2 \in [2, +\infty[$$

$$t = |z|^2 \qquad t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 2 \\ \cancel{-1} \end{cases}$$

$$\implies |z|^2 = 2 \implies \boxed{|z| = \sqrt{2}}$$

$$z^4 = |z|^2 + 2 \quad \text{ma } |z|^2 = 2 \implies z^4 = 4 = 4\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$z_0 = 4^{1/4}(\cos 0 + i\sin 0) = 4^{1/4}$$

$$z_1 = 4^{1/4}\left(\cos\left(0+\frac{2\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(0+\frac{2\pi}{4}\right)\right) = 4^{1/4}\cdot i$$

$$z_2 = 4^{1/4}\left(\cos\left(0+2\,\frac{2\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(0+2\,\frac{2\pi}{4}\right)\right) = 4^{1/4}\cdot(-1)$$

$$z_3 = 4^{1/4}\left(\cos\left(0+3\cdot\frac{2\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(0+3\,\frac{2\pi}{4}\right)\right) = 4^{1/4}\,(-i)$$

le soluzioni sono $\sqrt{2},\ i\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -i\sqrt{2}$