

$\mathbb{C} = \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ in forma algebrica

$$+ : (a+ib) + (c+id) = a+c + i(b+d)$$

$$\cdot : (a+ib) \cdot (c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$$

$$z = a+ib \quad \operatorname{Re} z \equiv a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im} z \equiv b \in \mathbb{R}$$

Oss: possiamo riguardare $\mathbb{R}$ come sottoinsieme di $\mathbb{C}$ in quanto

$$\mathbb{R} \longleftrightarrow \{z = a+ib : b=0\}$$

corrispondenza
biunivoca

Problema: ORDINARE i numeri complessi

Domanda: esiste su $\mathbb{C}$ un ordine totale, ovvero tale che $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ posso dire

$$z_1 < z_2 \text{ o } z_1 = z_2 \text{ o } z_1 > z_2 ?$$

Sì: ad esempio con l'ordine lessicografico

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z_1 \leq z_2 \text{ se } \begin{cases} a_1 < a_2 \\ \text{oppure} \\ a_1 = a_2 \text{ e } b_1 < b_2 \end{cases}$$

C'è un problema: questo ordine non è compatibile con le operazioni, in particolare non soddisfa

$$z_1 \leq z_2 \quad z_3 > 0 \Rightarrow z_1 \cdot z_3 \leq z_2 \cdot z_3$$

Il problema proviene da i infatti

$$z_1 = i \quad z_2 = 2i \quad z_3 = i$$

2

secondo l'ordine lexicografico

$$i = z_1 < z_2 = 2i \text{ e } 0 < z_3 = i$$

però

$$z_1 \cdot z_3 = i^2 = -1 > z_2 \cdot z_3 = 2i^2 = -2$$

NON VA BENE!!

Teorema

Fino l'ordine Totale introdotta su $\mathbb{C}$, questo non è compatibile con le operazioni

Esercizio

Calcolare $\sqrt[3]{1}$ in $\mathbb{C}$

dim

In $\mathbb{R}$ Trovavo soltanto $z_1 = 1$. Vediamo in $\mathbb{C}$

Se $z = a + ib$ è radice cubica di 1,

allora $(a + ib)^3 = 1$

$$a^3 + 3a^2 \cdot ib + 3a \cdot i^2 b^2 + i^3 b^3 - 1 = 0$$

$$a^3 + 3i a^2 b - 3a b^2 - i b^3 - 1 = 0$$

$$a^3 - 3a b^2 - 1 + i(3a^2 b - b^3) = 0$$

$$\begin{pmatrix} i^2 \\ i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

questo è un vettore con due componenti, perché diventi il vettore nullo entrambe le componenti devono essere $= 0$ cioè

$$\begin{cases} a^3 - 3a b^2 - 1 = 0 \\ b(3a^2 - b^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a^3 - 3a b^2 - 1 = 0 \\ 3a^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 1 \text{ o } \begin{cases} a^3 - 3a \cdot 3a^2 - 1 = 0 \\ 3a^2 = b^2 \end{cases}$$

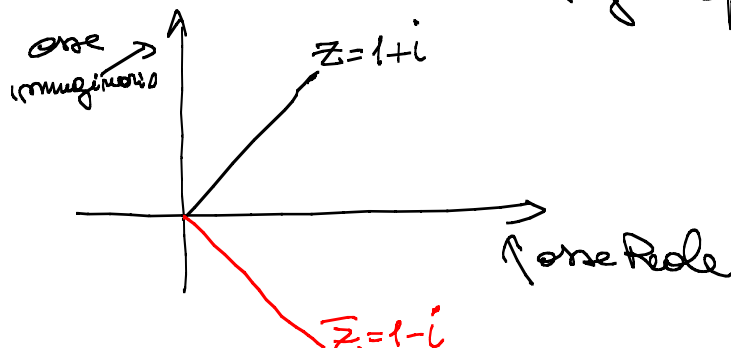
$$\Leftrightarrow z_1 = 1 \text{ o } \begin{cases} a^3 = -1/3 \\ 3a^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 1 \text{ o } \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ b^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = 1 \quad z_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Def (coniugato)

$z \in \mathbb{C}$ $z = a + ib$ diciamo che $\bar{z} = \text{coniugato di } z$
 e $\bar{z} = a - ib$

Oss: z e $\bar{z}$ hanno $\begin{cases} \text{la stessa parte reale} \\ \text{parte immaginaria di} \\ \text{segno opposto} \end{cases}$

Def (modulo)

Dato $z \in \mathbb{C}$ $z = a + ib$ diciamo "modulo di z "
 il numero reale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Oss: Se $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ è il modulo che avevamo
 introdotto a suo tempo

Oss $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Esercizio per casa (è una verifica)

- 1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
 - 2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
 - 3) $\overline{(\bar{z})} = z$
- $z \rightarrow \bar{z} \rightarrow \overline{(\bar{z})} = z$

dim

$$1) \overline{(a+ib) + (c+id)} = \overline{a+c + i(b+d)} = a+c - i(b+d)$$

$$\overline{(a+ib) + (c+id)} = \overline{a+ib} + \overline{c+id} = a-ib + c-id = a+c - i(b+d)$$

$$2) \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac - bd + i(bc+ad)} = ac - bd - i(bc+ad)$$

$$\overline{(a+ib)} \overline{(c+id)} = (a-ib)(c-id) = ac - bd - i(bc+ad)$$

$$3) \overline{(\overline{a+ib})} = \overline{a-ib} = a+ib$$

Esercizio

Trovare tutte le soluzioni ^{in $\mathbb{C}$} dell'equazione $i(\bar{z})^2 + z = -2i$

4

$z = a + ib$ ^{dim}

$$i(a - ib)^2 + a + ib + 2i = 0$$
$$i(a^2 + i^2 b^2 - 2iab) + a + ib + 2i = 0$$
$$ia^2 - ib^2 - 2i^2 ab + a + ib + 2i = 0$$
$$ia^2 - ib^2 + 2ab + a + ib + 2i = 0$$

$$2ab + a + i(a^2 - b^2 + b + 2) = 0$$

5

$$\begin{cases} a(2b+1) = 0 \\ a^2 - b^2 + b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b^2 - b - 2 = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a^2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

non ha sol. reali!!

$$\Rightarrow z_1 = 2i \quad z_2 = -i$$

Verifico $i(\bar{z})^2 + z = -2i$ $z = 2i$ $i(-2i)^2 + 2i = -2i$
 $-i4 + 2i = -2i$
 $-2i = -2i \quad \checkmark$

$z = -i$ $i(i)^2 + (-i) = -2i$
 $i(-1) - i = -2i$
 $-2i = -2i \quad \checkmark$

Esercizio

Sia $z = 1-i$ allora $w = \frac{|z|^2 - 3i\bar{z}}{iz - 1} = ?$
dim

$z = 1-i$ $\bar{z} = 1+i$ $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

$$w = \frac{2 - 3i(1+i)}{i(1-i) - 1} = \frac{2 - 3i + 3}{i + 1 - 1} = \frac{5 - 3i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} //$$

$$= \frac{-5i - 3}{1} = -3 - 5i$$



Proprietà del $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty]$

6

1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$; $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$

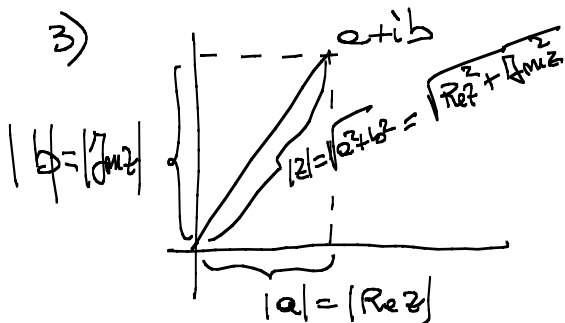
2) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

3) $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ||| in $\mathbb{R}$ non c'è

4) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

5) $|z+w| \leq |z| + |w|$ disuguaglianza triangolare
di Minkowski

1), 2) e 4) per esercizio



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| = |\operatorname{Re} z|$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b| = |\operatorname{Im} z|$$

molte

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2|a| \cdot |b| \text{ che è vero!!!}$$

5) Vogliamo provare che $|z+w| \leq |z| + |w|$

per fare questo prendo $z = a + ib$ e $w = c + id$

e considero la disuguaglianza dei quadrati

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w|$$

$$|a+ib+c+id|^2 \leq (a^2+b^2) + (c^2+d^2) + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \leq (a^2+b^2+c^2+d^2) + 2\sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{c^2} + 2\cancel{ac} + \cancel{b^2} + \cancel{d^2} + 2\cancel{bd} \leq \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + \cancel{d^2} + 2\sqrt{\cancel{a^2c^2} + \cancel{a^2d^2} + \cancel{b^2c^2} + \cancel{b^2d^2}}$$

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$$

$$\cancel{a^2c^2} + \cancel{b^2d^2} + 2\cancel{acbd} \leq \cancel{a^2c^2} + \cancel{a^2d^2} + \cancel{b^2c^2} + \cancel{b^2d^2}$$

$$0 \leq (ad - bc)^2 \text{ che è vero } \square$$

$$1) |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \quad \text{ovvio}$$

$$z=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow |z|=0$$

$$\text{per} \quad z \neq 0 \Rightarrow |z| > 0$$

$$\text{in} \quad \text{fatti} \quad z \neq 0 \Rightarrow \max\{a, b\} \neq 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq (\max\{a, b\})^2 > 0$$

$$2) \quad z = a + ib \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$-z = -a + i(-b) \quad |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bar{z} = a + i(-b) \quad |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$4) \quad |z \cdot w| = |(a+ib)(c+id)| = |(ac-bd) + i(bc+ad)|$$

$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 + a^2d^2 + 2abcd}$$

$$|z| \cdot |w| = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$$

Ricordo delle superiori

Dato $aX^2 + bX + c = 0$

- 2 radici $\neq$
- 2 " =
- 2 " complesse coniugate

8

Esercizio Trovare tutte le soluzioni di

$$X^2 + 2iX - 1 = 0$$

dim

con la formula Trovo $X_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 4}}{2}$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 4}}{2} = -i$$

ovvero trovo due soluzioni coincidenti
COMPLESSE

in quanto $x_{1,2} = -i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

III

Oss l'eq. presente ha i coefficienti in $\mathbb{C}$,
e dunque non soddisfa alla seguente
proprietà

Teorema

Dato $T(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

$$a_i \in \mathbb{R}$$

Se $T(z) = 0$ allora $\overline{T(z)} = 0$

dim

$$\text{Suppongo } T(z) = 0 = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$\Rightarrow \overline{T(z)} = \overline{0} = 0 = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$$\Rightarrow 0 = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0}$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{a_n} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0}$$

ma $a_i \in \mathbb{R} \forall i$ e dunque $\overline{a_i} = a_i$ 9

$$\Rightarrow a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow P(\overline{z}) = 0$$



Esercizio

Determinare le soluzioni di $z^4 - 1 = 0$
 dim

Osservo che $i^4 - 1 = (i^2)^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$

∴ Teorema Ruffini

$z^4 - 1$ è divisibile per $z - i$ (*)

Per il Teorema precedente

$$P(z) = z^4 - 1 \quad P(i) = 0 \Rightarrow P(\overline{i}) = P(-i) = 0$$

$\Rightarrow z^4 - 1$ è divisibile per $z + i$ (*)

Scopro che $z^4 - 1$ è divisibile per $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$

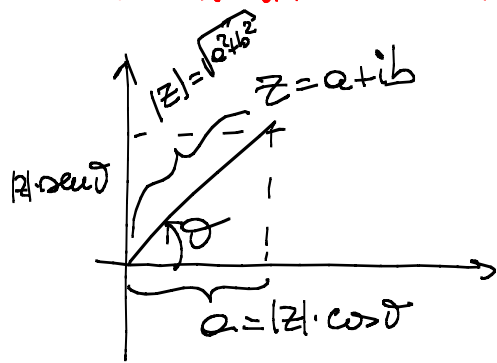
e infatti $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$

Le altre due radici le trovo analizzando

$$z^2 - 1 = 0 \quad \text{cioè } z_{3,4} = \pm 1$$



FORMA POLARE o TRIGONOMETRICA



$\vartheta = \arg z \equiv$ il più piccolo
angolo orientato in senso
antiorario dal semiasse
Reale al vettore $(z-0)$

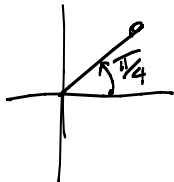
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

$$z = a + ib \longrightarrow \begin{cases} \vartheta = |z| = (a^2 + b^2)^{1/2} \\ \vartheta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0, b > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, & a < 0 \\ \frac{3}{2}\pi, & a = 0, b < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{b}{a}, & a > 0, b \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

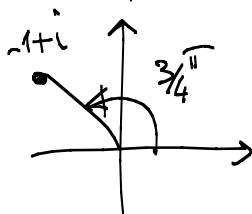
$$z = 1 + i$$

$$a = 1 > 0 \quad b = 1 > 0 \quad \vartheta = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

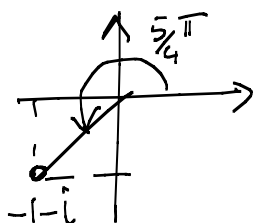


$$z = i$$

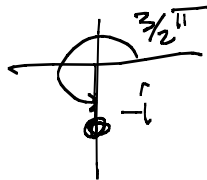
$$a = 0 \quad b = 1 > 0 \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$



$$a = -1 \quad b = 1 \quad \vartheta = \pi + \arctan \frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

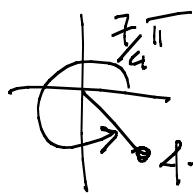


$$a = -1 \quad b = -1 \quad \vartheta = \pi + \arctan \frac{-1}{-1} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$$



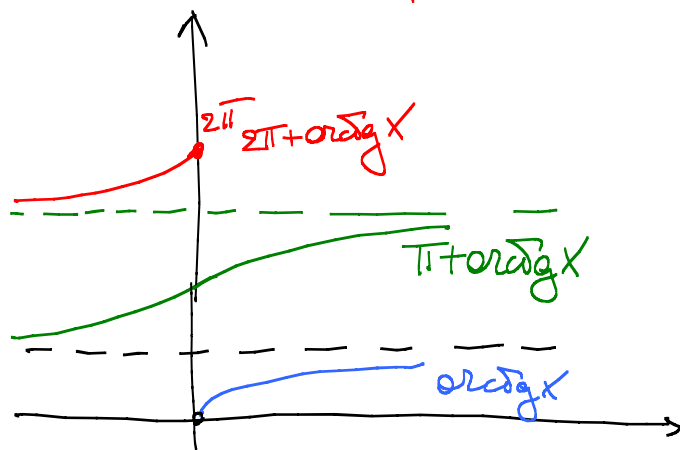
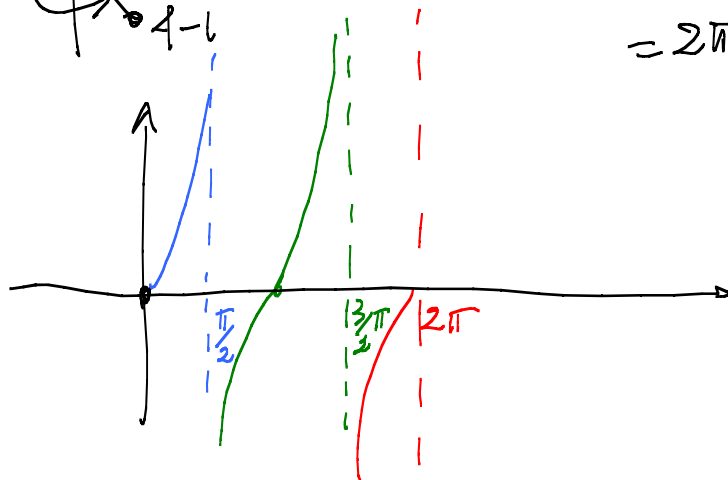
$$a=0 \quad b=-1 \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$$

11



$$a=-1 \quad b=1$$

$$\begin{aligned} \theta &= 2\pi + \arctan \frac{1}{-1} = \\ &= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi \end{aligned}$$



Esercizio

Determinare tutte le soluzioni di:
 $z^2 + 2iz - 2 = 0$