$\mathcal{M}_A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \ \forall a \in A\}$ sup A = min $\mathcal{M}_A$

$m_A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a \ \forall a \in A\}$ inf A = max m_A

Def

$A \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato superiormente se $\mathcal{M}_A = \emptyset$

" " inferiormente se $m_A = \emptyset$

quando $\mathcal{M}_A = \emptyset$ scriveremo $\sup A = +\infty$

$m_A = \emptyset$ " $\inf A = -\infty$

Esempi

$A =]0,1[$ limitato (sia superiormente che inferiormente)

$m_A =]-\infty, 0]$ $\mathcal{M}_A = [1, +\infty[$

$\inf A = 0$ $\sup A = 1$

$B = [3, +\infty[$ limitato inferiormente

$m_B =]-\infty, 3]$ $\mathcal{M}_B = \emptyset$

$\inf B = \max m_B = 3$ ma $3 \in B \Rightarrow 3 = \min B$

$\sup B = +\infty$

Teorema

$\mathbb{N}$ è limitato inferiormente ma non superiormente

dim

per l'assioma del buon ordinamento $\exists \min \mathbb{N} = 1$

Proviamo che $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = \emptyset$, ovvero $\sup \mathbb{N} = +\infty$

Supponiamo che $\exists \, a \in \mathbb{R}$: $n \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}$ x assurdo

prendiamo $\lfloor a \rfloor$ = parte intera di a = $\max\{n \in \mathbb{N} : n \leq a\}$

e si ha che

$$\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$$

$\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ $\lfloor 3 \rfloor = 3$

$\lfloor 2{,}8 \rfloor = 2$

ma $[a]+1 \in \mathbb{N}$, e dunque ho un assurdo $\square$

Corollario (Principio di Archimede)

Dati $0<a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}: na > b$

dim

$\nexists$ dati $0<a<b$ $a,b \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}: na > b$

$\nexists$ " " " $n > b/a$

ma questo è vero poiché $\sup \mathbb{N} = +\infty$ $\boxed{///}$

Teorema

$\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Q}$ è numerabile, in quanto $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biiettiva
- $\mathbb{R}$ non è numerabile

Osservo che $\sqrt{2}$, per esempio, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

e quindi $\sqrt{2} = 1,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \cdots$

dove lo sviluppo decimale è ILLIMITATO e NON PERIODICO

Quindi non posso conoscere lo sviluppo di $\sqrt{2}$

Dunque devo lavorare con approssimazioni

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \quad \text{etc}$$

È fondamentale poter approssimare bene quanto si vuole un n.ro reale attraverso dei numeri razionali

Def Dati A, B con $A \subseteq B$ diciamo che "A è denso in B" se $\forall b_1, b_2 \in B$, $b_1 < b_2$, $\exists a \in A$ t.c. $b_1 < a < b_2$

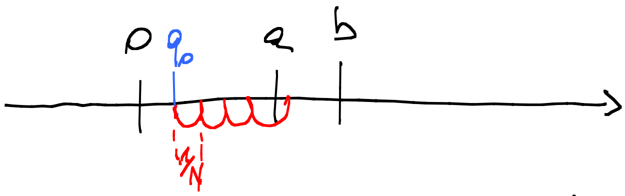
Teorema

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

dim

prendiamo $0<a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$ (gli altri casi li lasciamo al lettore interessato)

TS $\exists q\in\mathbb{Q} : a<q<b$



Voglio prendere $q_0\in\mathbb{Q}$, $q_0<a$ e un passo opportuno $\frac{1}{N}$ t.c., dopo un numero finito (m_0) di passi

$$a < q_0+\frac{m_0}{N} < b$$

Quanto deve essere lungo il "saltello"? deve essere di lunghezza $< b-a$: prendiamo $N\in\mathbb{N}$:

$0<\frac{1}{N}<b-a$ (*) esiste e lo proviamo dopo

Ora osserviamo che $\inf\mathbb{Q}=-\infty$ (ovvero $m_{\mathbb{Q}}=\emptyset$: infatti $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2 \dots\}\subseteq\mathbb{Q}$ e $\inf\mathbb{Z}=-\infty$)

$\Rightarrow \exists q_0\in\mathbb{Q} : \quad q_0<a$

$$S=\left\{m\in\mathbb{N} : a<q_0+\frac{m}{N}\right\}$$

1) S non è vuoto: infatti $q_0+\frac{m}{N}>a \Leftrightarrow \frac{m}{N}>a-q_0$

$\Leftrightarrow m>(a-q_0)\cdot N$

essendo $\sup\mathbb{N}=+\infty \Rightarrow \exists\, m>(a-q_0)\cdot N$

2) $S\neq\emptyset \Rightarrow$ $\exists\, m_0=\min S$, cioè $q_0+\frac{m_0}{N}>a$

principio buon ordinamento

ed inoltre $\underbrace{q_0+\frac{m_0-1}{N}\leq a}_{(**)}$

Ma allora

$$a < \underbrace{q_0 + \frac{m_0-1}{N} + \frac{1}{N}}_{q_0+\frac{m_0}{N}} \overset{(**)}{<} a + \frac{1}{N} < a + (b-a) = b$$

$b - a > 1/N$

$\boxed{///}$

Teorema (esercizio)

i) $\forall a > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \; 1/N < a$

ii) $\forall N \in \mathbb{N} \quad a \leq 1/N \Rightarrow a \leq 0$

dim (applicazione del principio di Archimede)

i) $a > 0 \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \; 1/N < a$

$a > 0 \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \; 1 < N \cdot a$

[ma presi $a, 1 > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \; Na > 1$] Principio di Archimede applicato a "a" e "1"

ii) il punto i) dice che

$\underbrace{A \Rightarrow B}$ dove $A =$ "$a > 0$" $B =$ "$\exists N : \frac{1}{N} < a$"

$\Updownarrow$ equivale a

$\underbrace{\text{non } B}_{\forall N \in \mathbb{N} \;\; a \leq 1/N} \Rightarrow \underbrace{\text{non } A}_{a \leq 0}$

dunque abbiamo provato che

$\forall N \in \mathbb{N} \quad a \leq 1/N \Rightarrow a \leq 0$

$\boxed{///}$

$\mathbb{C}$ I numeri complessi

Teorema (Fondamentale dell'Algebra)

Dato un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
con $a_i \in \mathbb{C}$ $i = 1 \dots n$
allora l'equazione $P(x) = 0$ possiede n radici
(contate con la dovuta molteplicità)

Esempio

i) $x^2 - 1 = 0$ ha 2 radici $x_1 = 1$ $x_2 = -1$

ii) $(x-1)^{1000} = 0$ ha 1 radice $x = 1$ contata 1000 volte

iii) $x^2 + 1 = 0$ ha 2 radici $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

Storicamente i numeri complessi risalgono a Gerolamo Cardano volere risolvere l'equazione di terzo grado

$$x^3 + bx + c = 0$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} x^3 + bx + c = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 + bx + c = -\infty \right.$$

e dunque si congettura che $P(x)$ attraversi l'asse x)

pone $x = u + v$

$$u^3 + v^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + b(u+v) + c = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3u \cdot v(u+v) + b(u+v) + c = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u+v)\underbrace{(3u \cdot v + b)} + c = 0$$

$$\begin{cases} 3uv + b = 0 \\ u^3 + v^3 + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 v^3 = -\frac{b^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -c \end{cases}$$

$X_1 X_2 = -b^3/27$

$X_1 + X_2 = -c$

$$\boxed{X^2 + cX - \frac{b^3}{27} = 0}$$

Consideriamo $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$+ : (a,b), (c,d) \longrightarrow (a+c; b+d)$

$\cdot ; (a,b), (c,d) \longrightarrow (ac-bd; ad+bc)$ |||

$+$: soddisfa associativa, commutativa, esiste l'elemento neutro $(0,0)$, esiste l'inverso additivo

$$-(a,b) = (-a,-b)$$

$\cdot$: soddisfa associativa, commutativa, esiste l'elemento neutro $(1,0)$ t.c. $(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot\phi; a\cdot\phi + b) = (a,b)$
esiste l'inverso per ogni numero $(a,b) \neq (0,0)$ e si ha

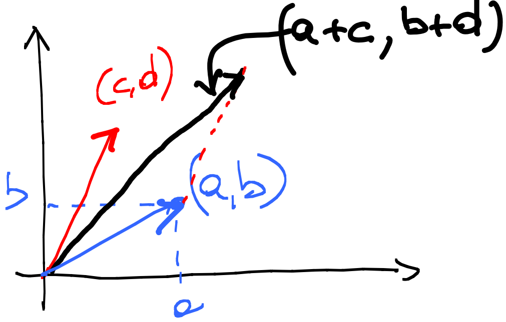
$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

infatti $(a,b)\,(a,b)^{-1} = (a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) =$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}; \cancel{-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}}\right) = (1,0)$$

- è verificata la distributiva
- NON sono soddisfatti gli assiomi relativi all'ordinamento totale di $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ sono i nostri numeri complessi



l'interpretazione della somma, geometricamente, è data dalla "regola del parallelogramma"

Osserviamo che $(a,b) = (a,0) + (0,b)$

$$= a(1,0) + b(0,1)$$

$$= (a,0)\cdot(1,0) + (b,0)\cdot(0,1)$$

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1 \,;\, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) \;!!!$$

$$(1,0)\cdot(1,0) = (1\cdot 1 - 0\cdot 0 \,;\, 1\cdot 0 + 0\cdot 1) = (1,0)$$

Forma algebrica (in $\mathbb{C}$)

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0)\cdot(1,0) + (b,0)\cdot(0,1)$$

$$\Updownarrow$$

$$a\cdot 1 + i\cdot b$$

ovvero pongo $(0,1) \longrightarrow i$ dove i è t.c. $i^2 = -1$
(cioè $i = \sqrt{-1}$)

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \;:\; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i \text{ è t.c. } i^2 = -1 \}$$

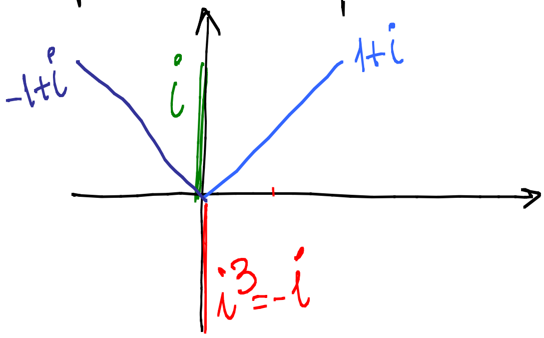
$$(a+ib) + (c+id) = a + c + i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = a\cdot c + i\,a\cdot d + i\,b\cdot c + i^2 b\cdot d$$

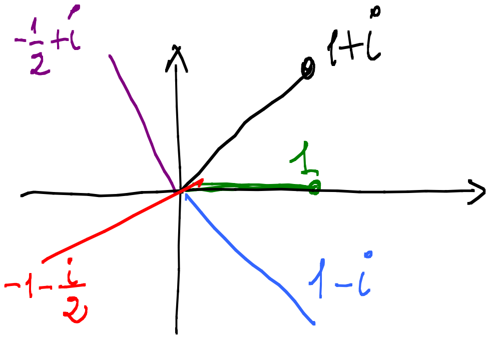
$$= a\cdot c + i(a\cdot d + bc) - bd$$

$$= (a\cdot c - bd) + i(ad + bc)$$

Rappresentare nel piano complesso $1+i$, i, i^3, $-1+i$



$$i^3 = i\cdot(i)^2 = -i$$



Def dato $z = a+ib \in \mathbb{C}$

$a = \operatorname{Re} z$ = parte reale di $z \in \mathbb{R}$

$b = \operatorname{Im} z$ = parte immaginaria di $z \in \mathbb{R}$

Esercizio

Trovare le soluzioni dell'eq. $z+i = -3+iz$

dim

Pongo $z = a+ib$: l'equazione diventa

$$(a+ib)+i = -3+i(a+ib)$$

$$a+ib+i+3-ia-i^2 b = 0$$

$$\underbrace{(a+3+b)}_{\text{parte reale}}+i\underbrace{(b+1-a)}_{\text{parte immaginaria}} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a+3+b=0 \\ b+1-a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=-3 \\ -a+b=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b=-4 \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-2 \\ a-2=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2 \\ a=-1 \end{cases} \iff z=-1-2i$$

$z+i = -3+iz$ verifica

$$(-1-2i)+i = -3+i(-1-2i)$$

$$-1-i = -3-i-2i^2 = -3-i+2 = -1-i \quad \checkmark$$

$\square$

Esercizio

Determinare le soluzioni di
$x^2+x+1=0$ in $\mathbb{C}$

dim

$x=a+ib$ e l'eq. diventa

$$(a+ib)^2+(a+ib)+1=0$$
$$a^2+i^2b^2+2iab+a+ib+1=0$$
$$(a^2-b^2+a+1)+i(2ab+b)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} a^2-b^2+a+1=0 \\ b(2a+1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-b^2+a+1=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a^2-b^2+a+1=0 \\ 2a=1 \end{cases}$$

$$\iff \cancel{\begin{cases} a^2+a+1=0 \\ b=0 \end{cases}} \ (*) \text{ o } \begin{cases} b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4} \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff x_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(*) l'equazione $a^2+a+1=0$ ha soluzioni
$$a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\notin\mathbb{R}$$
e dunque non sono accettabili in quanto $a,b\in\mathbb{R}$

Oss: Se avessimo risolto l'eq. direttamente

$$x^2+x+1=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$$

2 sol. complesse e coniugate