Definizione massimo/minimo

$A \subseteq \mathbb{Q}$

$M = \max A$ se $\begin{cases} M \in A \\ a \leq M \quad \forall a \in A \end{cases}$
massimo

$m = \min A$ se $\begin{cases} m \in A \\ m \leq a \quad \forall a \in A \end{cases}$
minimo

Teorema

A finito allora $\exists \min A = m \quad \exists \max A = M$
$A \subseteq \mathbb{Q}$

Teorema

il massimo (minimo) di A, se esiste, è unico

dim

Suppongo $\exists M_1 = \max A \quad M_2 = \max A : M_1, M_2 \in A$

$M_1 = \max A \Rightarrow M_1 \geq a \ \forall a \in A \Rightarrow M_1 \geq M_2$
$M_2 = \ '' \quad \Rightarrow M_2 \geq a \ \forall a \in A \Rightarrow M_2 \geq M_1$
$\Rightarrow M_1 = M_2$

$\boxed{///}$

Problema : $A \subseteq \mathbb{Q}$ A avente ∞ elementi $\Rightarrow \exists \min A$?

NO, in generale

$A = \{ 1/n : n \geq 1 \ n \in \mathbb{N} \} = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ \cdots \}$

$\forall a \in A \quad a \geq 0$ (infatti $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \geq 0$)

però

$0 \notin A$: infatti $\frac{1}{n} > 0 \ \forall n$

Provo che $\nexists \min A$: suppongo $\frac{1}{\bar{n}} = \min A$ allora

$\begin{cases} \frac{1}{\bar{n}} \in A \\ \frac{1}{\bar{n}} \leq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \bar{n} \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$ <u>assurdo</u>

$(\bar{n}+1 \in \mathbb{N}$ e $\bar{n}+1 > \bar{n}$!)

dunque $\nexists \min A$

$\boxed{///}$

Def $A \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathcal{M}_A$ = maggioranti di $A = \{b : b \geq a \ \forall a \in A\}$

m_A = minoranti di $A = \{d : d \leq a \ \forall a \in A\}$

Def

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$ con $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ diciamo (se esiste) che Λ è estremo superiore di A $\Lambda = \sup A$ se $\Lambda = \min \mathcal{M}_A$

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$ con $m_A \neq \emptyset$ diciamo (se esiste) che λ è estremo inferiore di A $\lambda = \inf A$ se $\lambda = \max m_A$

Oss: $\sup A$ e $\inf A$ se esistono, sono unici
(segue dall'unicità del $\min \mathcal{M}_A$ e del $\max m_A$)

Se $\mathcal{M}_A = \emptyset$ allora A illimitato superiormente $\sup A = +\infty$

Se $m_A = \emptyset$ " " " inferiormente $\inf A = -\infty$

Teorema $A = \{q \in \mathbb{Q} : 0<q \quad q^2<2\}$ non ha max

$B = \{ \quad " \quad : 0<q \quad 2<q^2\}$ " " min

dim

1) $\forall q \in A \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad N > \dfrac{2q+1}{2-q^2} \quad : \quad q + 1/N \in A$

e quindi $\nexists$ max A

2) Voglio provare che $\forall q \in B \ \exists N \in \mathbb{N} \ N > \dfrac{2q+1}{q^2-2} : q - 1/N \in B$
e quindi $\nexists$ min B

$$\left(q-\frac{1}{N}\right)^2 = q^2 + \frac{1}{N^2} - \frac{2q}{N} > q^2 - \frac{1}{N} - \frac{2q}{N}$$
$$= q^2 - \frac{2q+1}{N}$$

adesso $q^2 - \dfrac{2q+1}{N} > 2 \iff q^2 - 2 > \dfrac{2q+1}{N}$

$$\iff \frac{1}{q^2-2} < \frac{N}{2q+1}$$
$$\iff \frac{2q+1}{q^2-2} < N$$

quindi

$\forall q \in B \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad N > \dfrac{2q+1}{q^2-2} \quad : \quad q - 1/N \in B$ ///

Oss: $\mathcal{M}_A = [\sqrt{2}, +\infty[\qquad m_B =]-\infty, \sqrt{2}]$

Assioma di Dedekind (o di separazione o di completezza)
$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ $B \neq \emptyset$, tali che $a \le b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

allora $\exists c \in \mathbb{R} : a \le c \le b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

Oss: $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind:
si veda ad esempio

$A = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \quad q^2 < 2 \}$
$B = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \quad q^2 > 2 \}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è l'unica struttura, a meno di isomorfismi, che soddisfa gli assiomi 1) --- 11) + Assioma Dedekind

Teorema (esistenza dell'estremo superiore)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ con $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \Lambda = \sup A$

dim

Osservo che $\forall a \in A$ e $\forall b \in \mathcal{M}_A$ $a \leq b$

$\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$ $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in \mathcal{M}_A$

Assioma Dedekind.

$\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a \leq c \ \forall a \in A \leftarrow & c \in \mathcal{M}_A \\ c \leq b \ \forall b \in \mathcal{M}_A & c = \min \mathcal{M}_A \end{cases}$

$\Rightarrow c = \min \mathcal{M}_A = \sup A$ $\square$

Esempio Sia dato $A = [0, 3]$
" " $B = [0, 3[$

1

$A = [0,3] \Rightarrow \mathcal{M}_A = [3, +\infty[\Rightarrow \sup A = \min [3, +\infty[$
$= 3$
ma $3 \in A$
$\Rightarrow 3 = \sup A = \max A$

$B = [0,3[\Rightarrow \mathcal{M}_B = [3, +\infty[\Rightarrow \sup B = \min \mathcal{M}_B = \min [3, +\infty[$
$= 3$
ma $3 \notin B \Rightarrow \nexists \max B$