2015-10-13-Am1Gest-lezione 10 martedì 8.30÷10.30 1

Bertrand Russell

Tacchino Induttivo

Esempio (in cui non funziona l'induzione)

$P(x) = x^2 - x + 41$

$P(0) = 41$ che è primo
$P(1) = 41$ " " "
$P(2) = 43$ " " "
$P(3) = 9-3+41 = 47$ primo
$P(4) = 16-4+41 = 53$ "
...
$P(40)$ che è primo
$P(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ che NON è primo

Induttivamente, dopo 40 primi, potevo attendermi che anche il 41-esimo fosse primo
Ma non avevo provato che
$P(n)$ primo $\Rightarrow P(n+1)$ primo
che sicuramente non avrebbe funzionato

Esempio
Provare, o trovare un controesempio, alla seguente proposizione
" $n^3 + 2n + 4 < 2^n \quad \forall n > \bar{n}$ "

dim

$P(n) \equiv$ " $n^3 + 2n + 4 < 2^n$ "

$P(1)$ $\quad 1^3+2\cdot 1+4=7 > 2^1=2$ $\quad$ perciò $P(1)$ falso

$P(2)$ $\quad 2^3+2\cdot 2+4=16 > 2^2=4$ $\quad$ " $P(2)$ falso

$P(3)$ $\quad 3^3+2\cdot 3+4=37 > 2^3=8$ $\quad$ " $P(3)$ falso

...

$P(10)$ $\quad 10^3+2\cdot 10+4=2^{10}$

$P(11)$ $\quad 11^3+2\cdot 11+4<2^{11}$ $\quad$ ovvero $\underline{\underline{P(11) \text{ è VERO}}}$

Suppongo che $P(n)$ sia vero $\left(n^3+2\cdot n+4<2^n\right)$
voglio provare che $P(n+1)$ è vero cioè

$$(n+1)^3+2(n+1)+4<2^{n+1}$$

$$(n+1)^3+2(n+1)+4=n^3+3n^2+3n+2n+4+2+1$$

$$=\left(n^3+2n+4\right)+\left(3n^2+3n+3\right)=$$

$$=\left(n^3+2n+4\right)+3\left(n^2+n+1\right)\overset{(*)}{<}\left(n^3+2n+4\right)+\left(n^3+2n+4\right)$$

$$\underset{\text{ipotesi induttiva}}{<}2^n+2^n=2^{n+1}$$

(*) resta da provare che $\quad 3(n^2+n+1)<n^3+2n+4$
$\forall n>10$

ovvero $\quad 3n^2+3n+3<n^3+2n+4 \quad \forall n>10$

ovvero $\quad n^3-3n^2-n+1>0 \quad$ "

ovvero $\quad n^3+1>3n^2+n \quad \forall n>10$

ma $\quad n^3+1 \underset{n>10}{>} 10n^2+1 = 3n^2+7n^2+1 \underset{\substack{n^2>n \\ \forall n>10}}{>} 3n^2+7n+1 > 3n^2+n$

e dunque la disuguaglianza è verificata $\forall n>10$

3

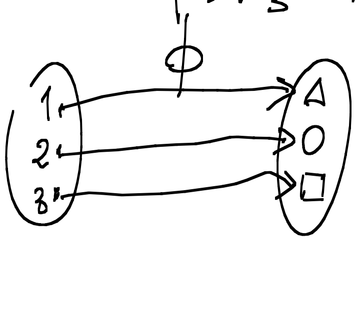
CARDINALITÀ

Def Un insieme A si dice "di cardinalità n" se $\exists \phi : A \to \{1,2,3,\dots,n\}$ biiettiva

Esempio

$A = \{\Delta, \circ, \square\}$, considero $I_3 = \{1,2,3\}$

e costruisco $\phi : I_3 \to A$ biunivoca data da



Cardinalità di un insieme finito $A \equiv \#A \equiv \mathrm{card}(A)$
$\equiv$ n.ro di elementi dell'insieme A

Def Un insieme si dice avere "cardinalità infinita" se l'insieme non è finito

Paradossi dell'infinito

Hotel con ∞ stanze

"Alle 24.00 di lunedì 12 ottobre l'hotel ha tutte le stanze occupate

Arriva un cliente e chiede una stanza:
il portiere chiama il direttore, che dice al cliente che lo sistemeranno nella camera n.ro 1. Come fanno?

Prende l'occupante della 1 e lo mette nella 2

"	"	2	"	"	"	3
"	"	3	"	"	"	4
"	"	4	"	"	"	5
— —	— —					
"	"	n	"	"	"	$n+1$
- - -						

Se l'hotel avesse un numero finito di stanze, il giochetto non funziona

Teorema E infinito sse $\exists A \subseteq E$ $\exists f: A \to E$ biiettiva
(ovvero un insieme ∞ è equipotente ad una sua parte propria)

Esempio $A = \mathbb{N}$ e $E = \mathbb{P} = $ n.ri pari

chiaramente $\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$ $\quad$ ($\mathbb{N} = \{\text{Pari}\} \cup \{\text{Dispari}\}$)

però $\exists\ \phi : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n/2$ che è biiettiva

$$\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, 10 \dots 2n, \dots\}$$

$$\phi(2) = 2/2 = 1 \qquad \phi(4) = 4/2 = 2 \qquad \phi(6) = 6/2 = 3 \qquad \phi(8) = 8/2 = 4$$

Teorema Dato un insieme E, si ha che

$$\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) \qquad \mathcal{P}(E) = \{B : B \subseteq E\}$$

dim

Proveremo che $\nexists\ f : E \to \mathcal{P}(E)$ surgettiva

Introduco $\boxed{A = \{x \in E : x \notin f(x)\}}$ ($f(x) \in \mathcal{P}(E)$ e dunque $f(x)$ è un insieme!)

$A \subseteq E \Rightarrow A \in \mathcal{P}(E)$ ovvero $\overset{\in E}{x} \longrightarrow f(x) = A \subseteq E$

$\boxed{\text{Per assurdo } f \text{ surgettiva}} \Rightarrow A \neq \emptyset$ (infatti deve $\exists\, y : f(y) = \emptyset$! e $y \notin \emptyset$)

$a \in A \Rightarrow a \notin f(a)$ ma $f(a) = A \Rightarrow a \notin A$ Assurdo

$a \notin A \Rightarrow a \in f(a)$ ma $f(a) = A \Rightarrow a \in A$ Assurdo

dunque $\nexists\ a : f(a) = A$ dunque f NON è suriett. $\square$

Paradosso del Barbiere

Esiste un barbiere che fa la barba a tutti coloro che non se la fanno da sé, lui si fa la barba?

L'insieme di tutti gli insiemi che non contengono sè stessi

Sia $\Omega = \{E : E \notin E\}$

$\Omega \in \Omega$ Assurdo: Ω contiene solo quegli insiemi E: $E \notin E$

$\Omega \notin \Omega$ Assurdo: se $\Omega \notin \Omega$ allora $\Omega \in \Omega$

Def Un insieme A si dice "numerabile" se $\exists\, \phi : \mathbb{N} \to A$ suriettiva

Esempio i numeri pari $\mathbb{P}$ sono un esempio di insieme numerabile

Esempio $\{p/q : p, q \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}^+$ è numerabile

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5			
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$			
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$			
4	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$	$5/4$			
5	$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$				

Esiste $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ suriettiva

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & \frac{1}{2}, & 2, & 3, & \frac{2}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{2}, & 4, & 5, \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & & & & & \end{array}$$

Problema: Esistono infiniti non numerabili (esistono insiemi A t.c. $\nexists\, f$ suriettive $f : \mathbb{N} \to A$)?

Sì per esempio $\mathbb{R}$ = insieme dei reali

Teorema (Cantor)

$\mathbb{R}$ non è numerabile

dim

Dimostreremo che $]0,1[\ (\subseteq \mathbb{R})$ non è numerabile

$$]0,1[= \left\{ 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_n \cdots \ : \ \alpha_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \right\}$$

$$0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{10^3}$$ (non lo dimostro: lo diamo per certo)

<u>Per assurdo</u> suppongo che $]0,1[$ sia numerabile

Questo significa che

$$]0,1[= \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0,\alpha_1^1\ \alpha_2^1\ \alpha_3^1\ \alpha_4^1\ \alpha_5^1\ \alpha_6^1 \ \cdots \\
a_2 &= 0,\alpha_1^2\ \alpha_2^2\ \alpha_3^2\ \alpha_4^2\ \alpha_5^2\ \alpha_6^2 \ \cdots \\
a_3 &= 0,\alpha_1^3\ \alpha_2^3\ \alpha_3^3\ \alpha_4^3\ \alpha_5^3\ \alpha_6^3 \ \cdots \\
a_4 &= 0,\alpha_1^4\ \alpha_2^4\ \alpha_3^4\ \alpha_4^4\ \alpha_5^4\ \alpha_6^4 \ \cdots \\
&\cdots \qquad\qquad\qquad \alpha_n^n
\end{aligned}$$

$$\bar{a} = 0,\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3\bar{\alpha}_4 \cdots \bar{\alpha}_n \cdots \quad \text{dove} \quad \bar{\alpha}_i = \begin{cases} 7 & \alpha_i^i < 5 \\ 2 & \alpha_i^i \geq 5 \end{cases}$$

Con questa costruzione, $\bar{a} \neq a_1, a_2, a_3, \ldots$

$\Downarrow$

$\bar{a}$ non può essere raggiunto da nessuna applicazione $\phi : \mathbb{N} \to]0,1[$

ovvero $]0,1[$ non è numerabile $\quad$ ////

$\mathbb{N}$ lo abbiamo visto con assiomi di Peano

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0\}$

Assiomi che definiscono $\mathbb{Q}$

esistono $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} := \frac{pq'}{q \cdot q'} + \frac{p'q}{q' \cdot q} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} := \frac{pp'}{qq'}$$

$+$ 1) $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

2) $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{Q}$

3) $\exists\, 0 \in \mathbb{Q} : a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in \mathbb{Q}$

4) $\forall a \in \mathbb{Q} \; \exists\, b \in \mathbb{Q}$ t.c. $a+b = b+a = 0$ e scriviamo $b = -a$

$\cdot$ 1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

2) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{Q}$

3) $\exists\, 1 \in \mathbb{Q} : a \cdot 1 = 1 \cdot a \quad \forall a \in \mathbb{Q}$

4) $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \; \exists\, b \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} \cdot b = b \cdot \frac{p}{q} = 1 \qquad b = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p}$

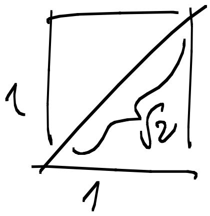
9) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c = c(a+b) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

10) $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

11) $a \leq b,\ \underset{\mathbb{Q}}{c} > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \quad \forall a,b \in \mathbb{Q}$

Dato S unito a questi 11 assiomi, è unico (a meno di isomorfismi, ovvero trasformazioni che conservano le operazioni) l'insieme che si costruisce ed è

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$$



$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Def (massimo)

$A \subseteq \mathbb{Q}$, diciamo che $\bar{a} = \max A$ se

$$\begin{cases} \bar{a} \in A \\ x \leq \bar{a} \quad \forall x \in A \end{cases}$$

Però l'insieme $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\} = B$ non ha massimo, pur essendo un insieme limitato

$$\mathcal{M}_B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq b \quad \forall b \in B\}$$