Esercizi sulle curve: sostegno, equazioni cartesiane, vettori (versori) tangenti, rette tangenti, lunghezza, integrali curvilinei

18 novembre 2005

1) Siano date le seguenti curve

- $\varphi_1 : [-\pi/2, 6] \to \mathbf{R}^2$ così definita:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \begin{cases} x(t) = 2 - t \\ y(t) = 4t - t^2 \end{cases} \quad t \in]0, 4], \begin{cases} x(t) = t - 6 \\ y(t) = 4 - t \end{cases} \quad t \in]4, 6]$$

- $\varphi_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ così definita:

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi], \begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 5\sin t \end{cases} \quad t \in]\pi, 2\pi],$$

- $\varphi_3 : [-2, 2] \to \mathbf{R}^2$ così definita:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \quad t \in [-2, 2],$$

Disegnate il sostegno di φ_1, di φ_2 e di φ_3, evidenziando il verso di percorrenza e scrivendo l'equazione cartesiana di ciascun tratto. Determinate poi vettore tangente, versore tangente, vettore normale, versore normale, retta tangente e retta normale

- nel punto $(1, 3)$ per φ_1;
- nel punto $(-3\sqrt{3}/2, -5/2)$ per φ_2;
- nel punto $(1, 1)$ per φ_3;

2) Scrivete una parametrizzazione della circonferenza di centro $(1, 2)$ e raggio 2 percorsa in verso antiorario partendo dal punto $(3, 2)$. Determinate vettore tangente (normale) e versore tangente (normale) alla curva nei punti $P = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.

3) Scrivete una parametrizzazione della seguente curva: si parte dal punto $(0, 0)$ e si percorre la circonferenza di centro $(1, 0)$ sino al punto $(1, -2)$; si prosegue poi lungo il segmento che congiunge $(1, -2)$ con $(3, 0)$; infine si ritorna al punto $(0, 0)$ muovendosi lungo l'asse delle ascisse. Disegnate il sostegno. Determinate la retta tangente alla curva nel punto $P = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

4) Scrivete una parametrizzazione della seguente curva: si parte dal punto $(0, 0)$ e si percorre la circonferenza di centro $(\pi, 0)$ sino al punto $(2\pi, 0)$; si prosegue poi lungo il grafico della funzione $\sin x$ e si ritorna in $(0, 0)$. Disegnate il sostegno. Determinate la retta normale alla curva nel punto $P = (\pi/4, \sqrt{2}/2)$.

5) Disegnate i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e parametrizzatene i bordi:

- $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$;
- $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \ -x \leq y, \ x\sqrt{3} \leq y\}$;
- $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \sqrt{2y^2 + x^2/2 - 1} \leq 1\}$ e determinate la retta tangente (normale) nel punto $(3/2, \sqrt{7}/4)$;
- $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 4 - |x| - |y| \geq 0\}$.

6) Data la curva $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ così definita:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]\,, \begin{cases} x(t) = -1 \\ y(t) = \pi - t \end{cases} \quad t \in]\pi, 2\pi],$$

- disegnate il sostegno della curva;
- la curva è regolare? motivate la risposta;
- scrivete la retta tangente (normale) nel punto $(1 - \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

7) Si consideri l'applicazione $\varphi : [1, 2] \to \mathbf{R}^2$ cosı definita

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t^2 - 4t \end{cases} \quad t \in [1, 2]$$

- dimostrate che si tratta di una curva regolare
- scrivete l'equazione cartesiana soddisfatta dai punti del sostegno di detta curva
- calcolate $\int_\varphi (x-1)$.

8) Si consideri l'applicazione $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}^2$ cosı definita

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

- dimostrate che si tratta di una curva regolare
- calcolate l'equazione della retta tangente nei punti $\varphi(0), \varphi(\pi/2)$
- disegnate, in modo approssimato, il sostegno di questa curva
- calcolate la lunghezza di questa curva (ovvero la lunghezza del sostegno)

9) Si consideri l'applicazione $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}^2$ cosı definita

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t + 1 \end{cases} \quad t \in [-1\,0]\,, \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t + 1 \end{cases} \quad t \in]0, 2],$$

- dimostrate che si tratta di una curva regolare

- determinate le equazioni cartesiane soddisfatte dalle componenti della curva
- disegnate il sostegno di questa curva
- determinate le coordinate del baricentro di questa curva.

9) Sia data la curva $\gamma : [1, e] \to \mathbf{R}^2$ di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = t + \log t \\ y(t) = t - \log t \end{cases} \qquad t \in [1\, e]\,.$$

- dimostrate che si tratta di una curva regolare
- determinate l'equazione della retta tangente nei punti $\gamma(1), \gamma(e)$
- calcolate il seguente integrale

$$\int_\gamma (x+y)^2.$$

10) Sia data la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]\,.$$

- dimostrate che si tratta di una curva regolare
- determinate l'equazione della retta tangente nei punti $\gamma(0), \gamma(1)$
- calcolate il seguente integrale

$$\int_\gamma xy.$$