Equazioni Differenziali

1) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''' + y'' = 6x + e^x$.

2) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = 3xz + 3x^3 z^{2/3} \\ z(0) = 8 \ . \end{cases}$$

3) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 9y' - 5y = e^x + \sin(2x) + e^{2x}.$$

4) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y^{iv} + 2y''' + y'' = e^{-x} + e^{-2x}.$$

5) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''' - 9y' = x^2 + \cos x + \sin x.$$

6) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z + z^{1/3} \sin x \\ z(\pi/2) = 1 \ . \end{cases}$$

7) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - xy^2 + x = 0 \\ y(0) = 0 \ . \end{cases}$$

8) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''' + y' = x + \cos 2x$.

9) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 8e^x + 3x^2$.

10) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 8e^x + 3x^2$.

11) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''' - 2y'' + 5y' = \cos 2x + e^x$.

12) Determinate (se esiste) l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(x - xy) \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

13) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{3}{2}x\right) y + y^{-1/3} \\ y(1) = 1 \ . \end{cases}$$

Lunghezza curve e integrali curvilinei

1) Considerate l'insieme così definito:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + |x| - 4 \leq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq 0\}.$$

a) Disegnate l'insieme E .
b) Calcolate la lunghezza dell'insieme ∂E , la frontiera di E.

2) Considerate l'insieme così definito:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^{2/3} + y^{2/3} \geq 1\}.$$

a) Disegnate l'insieme A .
b) Calcolate la lunghezza della curva ∂A , la frontiera di A.

3) Data la curva $\varphi(t) = (e^t \sin t\,, e^t \cos t)$, $t \in [0\,, \pi/2]$,
a) Disegnate l'insieme $\varphi([0\,, \pi/2])$, e in particolare determinate $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ in corrispondenza a $t = 0\,, \pi/6\,, \pi/4\,, \pi/3\,, \pi/2$.
b) Calcolate la lunghezza della curva.

4) Considerate l'insieme così definito:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x^{2/3} + y^{2/3} \geq 1\}.$$

a) Disegnate l'insieme A .
b) Calcolate la lunghezza della curva ∂A , la frontiera di A.

5) Data la curva $\varphi(t) = \left(t^{3/2}\,, t\right)$, $t \in [0\,, 1]$,
a) Disegnate l'insieme $\varphi([0\,, 1])$, e in particolare determinate $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ in corrispondenza a $t = 1$.
b) Calcolate la lunghezza della curva.

6) Sia dato l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)\}$.
a) Disegnate l'insieme A .
b) Calcolate la lunghezza di ∂A , la frontiera di A .

7) Considerate la curva così definita $\varphi(t) = \left(t - \frac{1}{3}t^3;\ t^2 + 1\right)$, con $t \in [1, 4]$;
a) scrivete l'equazione della retta tangente nel punto $\varphi(3)$;
b) calcolate la lunghezza della curva $\mathcal{L}(\varphi)$.

8) Considerate l'insieme così definito:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x \geq 0,\ 9x^2 + 9y^2 \geq 1,\ x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}.$$

a) Disegnate l'insieme B .
b) Calcolate la lunghezza della curva ∂B , la frontiera di B.

9) Considerate la curva così definita $\varphi(t) = (e^t \cos t;\ e^t \sin t)$, con $t \in [0, \pi]$;
a) disegnate il sostegno $\varphi([0, \pi])$ della curva;
b) scrivete l'equazione della retta tangente nel punto $(1, 0)$ e nel punto $\varphi(\pi/4)$;
c) calcolate il seguente integrale

$$\int_\varphi (x+1).$$

Insiemi di livello, sopra/sottolivelli. Massimi e minimi via sopra/sottolivelli

1) Considerate la funzione $f(x,y) = y + x^2 - 4x$;
   a) disegnate gli insiemi di livello $\{f = k\}$ di f ;
   b) determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme $A = [0,3] \times [-1,4]$;
   c) disegnate gli insiemi $\{f \geq m\}$ e $\{f \geq M\}$.

2) Sia data la funzione $f(x,y) = 2x(x^2 + y^2)^{-1}$.
   a) determinate il dominio di f ;
   b) disegnate gli insiemi $\{f = k\}$ e $\{f \geq k\}$ in corrispondenza a $k = 1/2$, $k = 1$ e $k = 2$;
   c) calcolate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme $\Omega = [2,3] \times [-1,2]$.

3) Considerate la funzione $f(x,y) = y + e^{x^2}$.
   a) Disegnate gli insiemi di livello $\{f = k\}$ di f ; disegnate inoltre gli insiemi $\{f \geq 0\}$, $\{f \geq -1\}$ e $\{f \leq 1\}$.
   b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme $A = [1,3] \times [2,4]$.

4) Considerate la funzione $f(x,y) = y(1 + x^2)^{-1}$.
   a) Disegnate gli insiemi di livello $\{f = k\}$ di f ; disegnate inoltre gli insiemi $\{f \geq 0\}$, $\{f \geq -1\}$ e $\{f \leq 1\}$.
   b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme $A = [-1,3] \times [-1,2]$.

5) Considerate la funzione

$$f(x,y) = \frac{2x - 2y}{x^2 + y^2 + 2}.$$

   a) Determinate gli insiemi di livello $\{f = k\}$ di f ; in particolare, disegnate gli insiemi $\{f = \sqrt{2}/2\}$, $\{f = 0\}$ e $\{f \leq -\sqrt{2}/2\}$.
   b) Determinate il minimo m della funzione f sul tiangolo T di vertici $A = (0,0)$, $B = (0,1)$ e $C = (-1,0)$.
   c) *Facoltativo*: determinate massimo e minimo assoluti di f su $\mathbb{R}^2$.

Calcolo di piani tangenti etc. Massimi e minimi etc.

1) Considerate la funzione $f(x,y) = 1 + xy - x - y$;
   a) determinate i punti stazionari di f sudiandone la natura;
   b) determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0,\ y - 4 \leq 0\}.$$

2) Considerate la funzione

$$f(x,y) = x^2y - x^2 - y^2.$$

   a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.
   b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} - 1 \leq y \leq 1\}$$

3) Considerate la funzione

$$f(x,y) = (x-1)(x^2 + y^2).$$

   a) Calcolate il gradiente della funzione f .
   b) Calcolate l'equazione del piano tangente a f nel punto $(1, 1, f(1,1))$.
   c) Calcolate l'equazione della retta tangente alla curva di livello $\{f = f(1,1)\}$ nel punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

4) Considerate la funzione

$$f(x,y) = x^3 - x^2 + xy^2 - y^2.$$

   a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.
   b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

5) Considerate la funzione

$$f(x,y) = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7.$$

   a) Calcolate $\nabla f(x,y)$, il gradiente della funzione f .
   b) Calcolate l'equazione del piano tangente a f nel punto $(1, 1, f(1,1))$.
   c) Calcolate l'equazione della retta tangente alla curva di livello $\{f = f(1,1)\}$ nel punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

6) Considerate la funzione $f(x,y) = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$.
   a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.
   b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme

$$A = \left[-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right] \times [1,2].$$

3) Considerate la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

   a) Calcolate il gradiente della funzione f .
   b) Calcolate l'equazione del piano tangente a f nel punto $(1, 0, f(1,0))$.
   c) Calcolate l'equazione della retta tangente alla curva di livello $\{f = f(1,0)\}$ nel punto $(x_0, y_0) = (1,0)$.

7) Considerate la funzione
$$f(x,y)=x^4+y^4-4xy.$$

a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.
b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme
$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\le x\le 1\}$$

8) Considerate la funzione
$$f(x,y)=x^2+y^2-2x+1.$$

a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.
b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme
$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x,\ x-2\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$$

9) Sia data la funzione
$$f(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2+2}.$$

a) Calcolare $\nabla f(x,y)$, il gradiente della funzione f.
b) Calcolare l'equazione del piano tangente a f nel punto $(0,1,f(1,0))$.
c) Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva di livello $\{f=f(1,0)\}$ nel punto $(x_0,y_0)=(1,0)$.

10) Considerate la funzione $f(x,y)=1+xy-x-y$;
a) determinate i punti stazionari di f sudiandone la natura;
b) determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme
$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-x^2\ge 0,\ y-4\le 0\}.$$

11) Data la funzione $f(x,y)=(x-2)\big(y^2(x-2)-(2y-4)\big)$, determinarne i punti stazionari e studiarne la natura.

12) Considerate la funzione
$$f(x,y)=x^3+y^3-x^2-y^2.$$

a) Calcolate $\nabla f(x,y)$, il gradiente della funzione f.
b) Calcolate l'equazione del piano tangente a f nel punto $(1,1,f(1,1))$.
c) Calcolate i punti stazionari di f studiandone la natura.
d) Calcolate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme
$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}.$$

13) Considerate la funzione
$$f(x,y)=3xy^2+y^2-3x-6y+7.$$

a) Calcolate $\nabla f(x,y)$, il gradiente della funzione f.
b) Calcolate l'equazione del piano tangente a f nel punto $(0,1,f(0,1))$.
c) Calcolate l'equazione della retta tangente alla curva di livello $\{f=f(0,1)\}$ nel punto $(x_0,y_0)=(0,1)$.

14) Considerate la funzione
$$f(x,y)=xye^{x-y}.$$

a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.

b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0, \ -2 \leq y \leq 0\}.$$

15) Considerate la funzione

$$f(x, y) = e^{-y} \sin x + \log(1 + xy).$$

a) Calcolate $\nabla f(x, y)$, il gradiente della funzione f .
b) Calcolate l'equazione del piano tangente a f nel punto $(\pi, 0, f(\pi, 0))$.
c) Calcolate l'equazione della retta tangente alla curva di livello $\{f = f(\pi, 0)\}$ nel punto $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$.

16) Considerate la funzione

$$f(x, y) = x^2y^2 + x^2y + \frac{y^2}{2} - 4y + 2.$$

a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.
b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme $A = [-2, 2] \times [0, 1]$.

Integrali

Nota: Quando si applica il teorema del cambio di variabili negli integrali multipli, data una trasformazione $(u, v) = \Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))$, indichiamo con J_Φ la matrice

$$J_\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x \Phi_1 \ ; \ \partial_y \Phi_1 \\ \partial_x \Phi_2 \ ; \ \partial_y \Phi_2 \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \nabla \Phi_2 \end{pmatrix} (x, y).$$

1) Sia dato l'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 4y^2 \leq 1, \ y - x \geq 0\}.$$

   a) Disegnate l'insieme Ω .
   b) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_\Omega \frac{x}{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy.$$

2) Considerate l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq x \leq y\}.$$

   a) Disegnate l'insieme A .
   b) Calcolate il seguente integrale:

$$\int_A \frac{x^2 y}{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

3) Considerate l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \ x^2 - 1 \leq y\}.$$

   a) Disegnate l'insieme A .
   b) Calcolate le coordinate del baricentro di A .

4) Considerate l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 4, \ |x| + |y| \geq 1\}.$$

   a) Disegnate l'insieme A .
   b) Calcolate il seguente integrale:

$$\int_A (x + y) dxdy.$$

5) Considerate l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^3 \leq y^2 \leq 1\}.$$

   a) Disegnate l'insieme A .
   b) Calcolate

$$\int_A (x + y) \, dxdy.$$

6) Considerate l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \ \ 0 \leq y, \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x^{2/3} + y^{2/3} \geq 1\}.$$

a) Disegnate l'insieme A .
b) Calcolate

$$\int_A x^2 y\, dxdy.$$

7) Sia E l'insieme delimitato dalle curve $x = 0$, $y = e^x - 2$ e $y = -x + e - 1$.
a) Disegnate l'insieme E .
b) Calcolate

$$\int_E dxdy.$$

8) Considerate l'insieme così definito:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -|x| \leq y \leq |x|,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

a) Disegnate l'insieme E .
b) Utilizzando le coordinate polari (ρ, θ) e la trasformazione $\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, determinare $\Phi^{-1}(E)$.
c) Utilizzando il teorema del cambio di variabili, calcolare il seguente integrale

$$\int_E \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dxdy.$$

9) Considerate l'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2\ \ \sqrt{y} \leq x \leq y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 4\ \ \sqrt{y} \leq x \leq 2\}.$$

a) Disegnate l'insieme Ω .
b) Scrivete l'insieme Ω come dominio normale rispetto all'asse x .
b) Calcolate

$$\int_\Omega \frac{\sin x}{x}\, dxdy.$$

10) Considerate il seguente integrale

$$\int_2^3 dx \left(\int_x^{9-x^2} f(x, y)\, dy \right).$$

a) Disegnate l'insieme di integrazione Ω .
b) Invertite l'ordine di integrazione.
c) Calcolate $\displaystyle\int\int_\Omega (x + y)\, dxdy$.

11) Considerate il seguente integrale

$$\int_0^1 dy \left(\int_{\arcsin y}^{\pi y/2} f(x, y)\, dx \right).$$

a) Disegnate l'insieme di integrazione Ω .
b) Invertite l'ordine di integrazione.
c) Calcolate la misura di Ω $\displaystyle\int\int_\Omega dxdy$.

12) Dopo aver disegnato l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le 2x-y \le 2\}$, calcolate il seguente integrale

$$\int\int_A f(x, y)\, dxdy$$

dove $f(x, y) = (1/3)(x+y)e^{2x-y}$.
(suggerimento: si utilizzi il cambio di variabili $(u, v) = \Phi(x, y) = (x+y,\ 2x-y)$, si disegni $\Phi(A)$ e si osservi (calcolatelo!) che $\det J_\Phi(u, v) = 3$).

13) Dopo aver disegnato l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le xy \le 2,\ 2y \le x \le 3y\}$, calcolate il seguente integrale

$$\int\int_A f(x, y)\, dxdy$$

dove $f(x, y) = (y/2x)e^{xy}$.
(suggerimento: si utilizzi il cambio di variabili $(u, v) = \Phi(x, y) = (xy,\ x/y)$, si disegni $\Phi(A)$ e si osservi (calcolatelo!) che $\det J_\Phi(u, v) = 2v$).