COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	____________________	
MATRICOLA		1 2 3 4
CORSO	SC.ARCH. DIS.IND. TECN.ED.	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

ESAME DI ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2004-2005 — PARMA, 11 NOVEMBRE 2005

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

---

1) Determinate (se esiste) l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(x - xy) \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

Soluzione: Questa equazione si scrive come $y' = xy - xy^2$ che è un'equazione di Bernoulli; inoltre si puo' anche scrivere come $y' = x(y - y^2)$, che è un'equazione a variabili separabili. Risolveremo l'equazione come fosse di Bernoulli. Attraverso la sostituzione $z(x) = 1/y(x)$ si ha

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{y'}{y^2} = \\ &= -\frac{xy - xy^2}{y^2} = \\ &= -xz + x \end{aligned}.$$

Quest'ultima equazione $z' = -xz + x = a(x)z + b(x)$ risulta essere lineare del primo ordine (oppure a variabili separabili, se si preferisce) e quindi moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante $e^{-A(x)} = e^{x^2/2}$ (dove $A'(x) = a(x) = -x$) si ottiene

$$z'(x)e^{x^2/2} + xz(x)e^{x^2/2} = xe^{x^2/2}$$

e dunque

$$(z(x)e^{x^2/2})' = xe^{x^2/2}$$

Se due funzioni sono uguali, allora le primitive differiscono per una costante ovvero $z(x)e^{x^2/2} = e^{x^2/2} + c$ e quindi l'integrale generale è

$$z(x) = 1 + ce^{-x^2/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ora, passando al reciproco, si trova $y(x) = \left(1 + ce^{-x^2/2}\right)^{-1}$ e imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1/2$ troviamo $c = 1$.

La soluzione del problema di Cauchy è la seguente:

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-x^2/2}}.$$

2) Sia data la funzione $f(x,y) = 2x(x^2+y^2)^{-1}$.

a) determinate il dominio di f ;

b) disegnate gli insiemi $\{f = k\}$ e $\{f \geq k\}$ in corrispondenza a $k = 1/2$, $k = 1$ e $k = 2$;

c) calcolate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme $\Omega = [2,3] \times [-1,2]$.

Soluzione:

a)Il dominio è $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

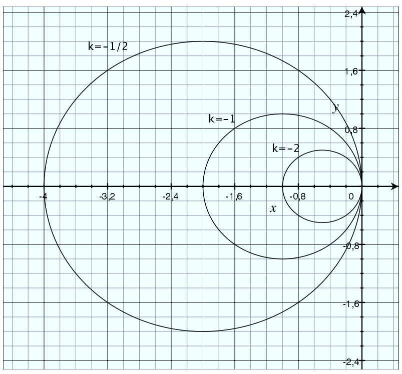
b) Per gli insiemi di livello $\{f = k\}$, si ha che

- se $k = 0$ allora trovo $\{f = 0\} = \{(x,y) \neq (0,0) \ : \ x = 0\}$;
- se $k \neq 0$ allora $f(x,y) = k$ equivale a scrivere $(x^2+y^2) = x(2/k)$, cioè

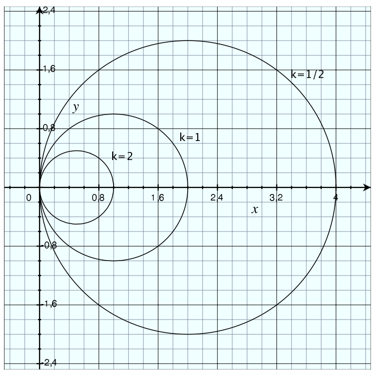
$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{k^2}$$

ovvero $\{f = k\} = \{(x,y) \neq (0,0) \ : \ (x - 1/k)^2 + y^2 = 1/k^2\}$ è una circonferenza centrata in $(1/k, 0)$ avente raggio $1/|k|$, tangente all'asse y e privata del punto $(0,0)$.

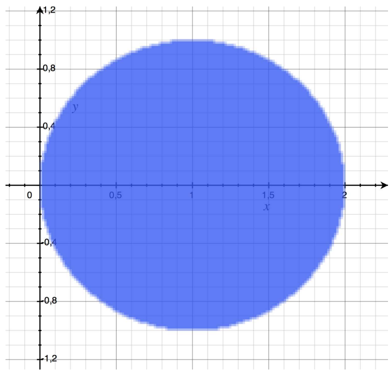
Ad esempio $\{f = 1\} = \{(x,y) \neq (0,0) \ : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, mentre $\{f \geq 1\} = \{(x,y) \neq (0,0) \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, ovvero $\{f \geq k\}$ è un disco centrato in $(1/k, 0)$ avente raggio $1/|k|$, tangente all'asse y e privato del punto $(0,0)$.



$\{f = k\}$, con $k < 0$



$\{f = k\}$, con $k > 0$



$\{f \geq 1\}$

c) Per determinare il massimo, si osserva che (dopo aver svolto il punto b), altrimenti non si riesce a procedere utilizzando gli insiemi di livello della funzione f) considerando il seguente insieme

$$\{f \geq 1 = f(2,0)\} = \{(x,y) \neq (0,0) \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

e osservando che

i) $\{f \geq 1\} \cap \Omega = \{(0,2)\}$;

ii) $\{f \geq 1 + \varepsilon\} \cap \Omega = \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$;

ne segue che $\max\{f(x,y) \ : \ (x,y) \in \Omega\} = 1 = f(2,0)$.

Per il minimo, si considera l'insieme

$$\{f \leq \frac{6}{13} = f(3,2)\} = \{(x,y) \neq (0,0) \ : \ \left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + y^2 \geq \frac{169}{36}\}$$

e si osserva, analogamente a quanto fatto in precedenza, che

iii) $\{f \leq 6/13\} \cap \Omega = \{(3,2)\}$;

iv) $\{f \leq (6/13) - \varepsilon\} \cap \Omega = \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$;

ne segue che $\min\{f(x,y) \ : \ (x,y) \in \Omega\} = 6/13 = f(3,2)$

3) Considerate la funzione

$$f(x,y) = xye^{x-y}.$$

a) Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.
b) Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 0,\ -2 \le y \le 0\}.$$

Soluzione: a) Si procede calcolando il gradiente della funzione f, dato da $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (ye^{x-y} + xye^{x-y};\ xe^{x-y} - xye^{x-y})$, e quindi i punti stazionari si ottengono risolvendo $\nabla f = (0,0)$, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y(x-1) = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases} \quad \text{avente soluzioni} \quad P = (0,0);\ Q = (-1,0)$$

Per determinare la natura dei punti si calcola la matrice hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{x,x};\ f_{x,y} \\ f_{y,x};\ f_{y,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(2-x);\ (1-y)(1+x) \\ (1-y)(1+x);\ x(y-2) \end{pmatrix} e^{x-y}$$

e quindi si trova che
- $\det H_f(0,0) = -1$, da cui segue che il punto $P = (0,0)$ è di sella;
- $\det H_f(-1,1) = e^{-4}$ e $f_{x,x}(-1,1) = e^{-2} > 0$, da cui segue che il punto $Q = (-1,1)$ è di minimo.

b) Risulta necessario studiare la funzione sulla frontiera del quadrato A, e questo significa considerare la frontiera come unione dei 4 lati:

$$\partial A = \gamma_1([-2,0]) \cup \gamma_2([-2,0]) \cup \gamma_3([-2,0]) \cup \gamma_4([-2,0]).$$

i) presa $\gamma_1(t) = (t,0)$, si ha che $f(\gamma_1(t)) = 0$ per ogni $t \in [-2,0]$.
ii) presa $\gamma_2(t) = (0,t)$, si ha che $f(\gamma_2(t)) = 0$ per ogni $t \in [-2,0]$.
iii) presa $\gamma_3(t) = (t,-2)$, si ha che $f(\gamma_3(t)) = g_3(t) = -2e^2te^t$ per ogni $t \in [-2,0]$. Adesso $g_4'(t) = -2e^2(1+t)e^{-t} = 0$ se e soltanto se $t = -1 \in [-2,0]$. In questo caso si osserva che $g_4''(-1) < 0$, e dunque g_4 ha un massimo relativo in $t = -1$. Confrontando con i valori agli estremi si ottiene $\max g_3 = g_3(-1) = f(-1,-2) = 2e$ mentre $\min g_4 = g_4(0) = f(0,-2) = 0$
iv) presa $\gamma_4(t) = (-2,t)$, si ha che $f(\gamma_4(t)) = g_4(t) = -2e^{-2}te^{-t}$ per ogni $t \in [-2,0]$. Adesso $g_4'(t) = -2e^{-2}(1-t)e^{-t} = 0$ se e soltanto se $t = 1 \notin [-2,0]$, e dunque g_4 è monotona decrescente e quindi $\max g_4 = g_4(-2) = f(-2,-2) = 4$ mentre $\min g_4 = g_4(0) = f(-2,0) = 0$

Ora possiamo dare il risultato: per il minimo è facile concludere perche' la funzione, in A, è sempre positiva o nulla e quindi

$$\min_{(x,y)\in A)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

mentre per quanto riguarda il massimo bisogna valutare il massimo tra i massimi relativi ottenuti nel punto a) - nessuno - ed i massimi relativi ottenuti in i), ii), iii) e iv) ovvero

$$\max_{(x,y)\in A)} f(x,y) = \max\{f(-2,-2);\ f(-1,-2)\} = f(-1,2) = 2e.$$

4) Considerate l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 2 \;\; \sqrt{y} \le x \le y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le y \le 4 \;\; \sqrt{y} \le x \le 2\}.$$

a) Disegnate l'insieme Ω .
b) Scrivete l'insieme Ω come dominio normale rispetto all'asse x .
b) Calcolate

$$\int_\Omega \frac{\sin x}{x}\, dxdy.$$

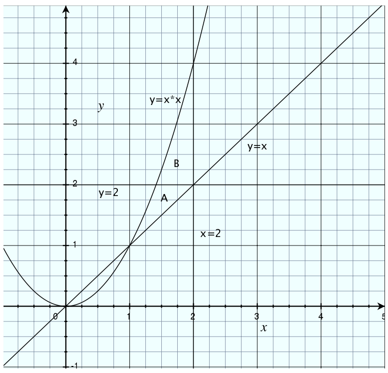
Soluzione:

a) Poniamo

$$\Omega = A \cup B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 2 \;\; \sqrt{y} \le x \le y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le y \le 4 \;\; \sqrt{y} \le x \le 2\}.$$

e osserviamo che sia a che B sono scritti come domini normali rispetto all'asse y , ed in particolare

- A è compreso tra le curve $y = x^2$ ($x = \sqrt{y}$) "a sinistra e sopra", $y = 2$ "sopra" e $y = x$ "sotto";
- B è compreso tra le curve $y = x^2$ ($x = \sqrt{y}$) "sopra", $x = 2$ "a destra" e $y = 2$ "sotto".



$$\Omega = A \cup B$$

b) Una volta fatto il disegno, si deduce

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \;\; x \le y \le x^2\}.$$

c) Per calcolare l'integrale, è necessario utilizzare la rappresentazione di Ω introdotta nel punto b) e si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\sin x}{x} dxdy &= \int_1^2 dx \left(\int_x^{x^2} \frac{\sin x}{x} dy \right) = \\
&= \int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx \left(\int_x^{x^2} dy \right) = \\
&= \int_1^2 (x^2 - x) \frac{\sin x}{x} dx = \\
&= \int_1^2 x \sin x dx - \int_1^2 \sin x dx = \\
&= [-x \cos x + \sin x]_1^2 - [-\cos x]_1^2 = \\
&= -\cos 2 + \sin 2 - \sin 1.
\end{aligned}$$