Teorema 0.1 `(Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)` *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo I. Fissato $a \in I$, sia*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \quad x \in I.$$

Allora $F(x)$ è una primitiva di f , ovvero $F'(x) = f(x)$.

Questo teorema garantisce

l'esistenza

di una primitiva di una generica funzione continua f, espressa in funzione delle funzioni elementari, ma non dice come si possa esprimere F in termini delle funzioni elementari. Ovvero

non è detto che F sia esprimibile in termini funzioni elementari.

Esempio 0.2 *La funzione $f(x) = \dfrac{1 + x\,(1 + \ln(x))}{x(1+x)^2}$, definita e continua su $]0, +\infty[$, ha infinite primitive date, al variare di $C \in]0, +\infty[$, da*

$$\int_1^x \frac{1 + t\,(1 + \ln(t))}{t(1+t)^2}\,dt + C, \qquad x \in]0, +\infty[.$$

Utilizzando le tecniche introdotte per calcolare esplicitamente una primitiva in termini di funzioni elementari (integrazione per decomposizione in somma, per parti e per sostituzione) si ottiene

$$\int_1^x \frac{1 + t\,(1 + \ln(t))}{t(1+t)^2}\,dt = \frac{\ln(x)}{1+x}, \qquad x \in]0, +\infty[.$$

Osservazione 0.3 *Se nell'esempio precedente avessimo preso, in luogo della funzione $f(x) = \dfrac{1 + x\,(1 + \ln(x))}{x(1+x)^2}$, una qualsiasi funzione razionale $P(x)/Q(x)$, potevamo concludere in modo analogo con l'esibizione della primitiva in termini di funzioni elementari.*

Ma non sempre la cosa funziona!

Esempio 0.4 *La funzione $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, definita e continua su $]0, +\infty[$, ha (per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) infinite primitive date, al variare di $C \in]0, +\infty[$, da*

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt + C, \qquad x \in]0, +\infty[.$$

Se, come nell'esempio precedente, si cerca di ottenere una espressione `esplicita` *di una primitiva U di u in termini di funzioni elementari si va incontro a un fallimento, in quanto tale espressione* **non esiste**.

Ma questo vale non solo per la funzione $\dfrac{e^x}{x}$, ma anche per $\dfrac{\sin x}{x}$, e^{-x^2} ... Si intuisce che la classe di funzioni le cui primitive `non` sono esprimibili in termini di funzioni elementari è molto più grande della classe per cui le primitive sono esprimibili.

Questo problema fu affrontato da Liouville nel diciannovesimo secolo, che elaborò dei criteri per riconoscere se una funzione avente un certa espressione abbia primitive esprimibili in termini di funzioni elementari.

Tra i risultati di Liouville, che esulano dal corso di Analisi Matematica 1, ricordiamo la seguente condizione necessaria.

Teorema 0.5 *Siano date $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni razionali, con $g(x)$ non costante. Se $H(x)$, funzione primitiva di $f(x)e^{g(x)}$, è esprimibile in termini di funzioni elementari, allora esiste una funzione razionale $R(x)$ tale che*

$$H(x) = R(x)e^{g(x)}$$

.

Utilizzando il risultato di Liouville si chiarisce l'esempio precedente

Corollario 0.6 *La funzione $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ ha primitive che non sono esprimibili in termini di funzioni elementari.*

Dim. Per assurdo si supponga che esista $U(x)$, primitiva di

$$u(x) = \frac{e^x}{x},$$

esprimibile in termini di funzioni elementari. Per il Teorema di Liouville, essendo e^x/x il prodotto di una funzione razionale $(1/x)$ e di un esponenziale avente come esponente una funzione razionale (e^x) deve necessariamente esistere $R(x)$ funzione razionale tale che

$$U(x) = R(x)e^x.$$

Necessariamente si ha

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x} &= \frac{d}{dx}\left(R(x)e^x\right) \\ &= R'(x)e^x + R(x)e^x \end{aligned} \qquad \text{e dunque} \quad \frac{1}{x} = R'(x) + R(x).$$

Ma $R(x)$ è una funzione razionale, ovvero $R(x) = P(x)/Q(x)$ con $P(x)$ e $Q(x)$ prive di fattori comuni. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= R'(x) + R(x) \\ &= \frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)} \\ &= \frac{Q(x)P(x) + Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$Q^2(x) = xQ(x)P(x) + x\left\{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)\right\}$$

che si può scrivere

$$(*) \qquad Q(x)\left\{Q(x) - xP(x) - xP'(x)\right\} = -xP(x)Q'(x).$$

Proviamo che $(*)$ è impossibile. Dall'identità $(*)$ si deduce che $Q(0) = 0$, dunque in $Q(x)$ manca (almeno) il termine di grado zero. Dunque esiste un polinomio $Q_1(x)$, con $Q_1(0) \neq 0$, ed un intero $n > 0$ tali che

$$Q(x) = x^n Q_1(x)$$

e quindi

$$\begin{aligned} Q'(x) &= x^n Q_1'(x) + nx^{n-1}Q_1(x) \\ &= x^{n-1}\left\{xQ_1'(x) + nQ_1(x)\right\}. \end{aligned}$$

Ma P e Q devono essere privi di fattori comuni, per cui necessariamente $P(0) \neq 0$. Sostituendo in $(*)$ l'espressione ottenuta per Q' si ottiene che il primo membro diventa (P, P', Q_1 e Q_1' sono funzioni di x)

$$\begin{aligned} (I) &\equiv x^n Q_1\left[x^n Q_1 - xP - xP'\right] \\ &= x^{n+1}\left[x^{n-1}Q_1 - P - P'\right] \\ &= x^{n+1}W(x) \end{aligned}$$

dove $W(x)$ è un polinomio tale che $W(0) \neq 0$. Il secondo membro dell'identità $(*)$ diventa

$$\begin{aligned}(II) &\equiv -xPx^{n-1}\left[xQ_1' + nQ_1\right] \\ &= -x^n P\left[xQ_1' + nQ_1\right] \\ &= x^n Z(x)\end{aligned}$$

dove $Z(x)$ è un polinomio tale che $Z(0) \neq 0$. L'identità $(*)$ diventa

$$x^{n+1}W(x) = x^n Z(x), \qquad \text{dove} \quad W(0) \neq 0,\ Z(0) \neq 0$$

che è manifestamente impossibile, in quanto semplificando si arriva a

$$xW(x) = Z(x), \qquad \text{dove} \quad W(0) \neq 0,\ Z(0) \neq 0$$

ovvero $Z(0) = 0$! $\square$

Osservazione 0.7 *Una volta chiarita la differenza tra le espressioni avere una primitiva e avere una primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari, non bisogna saltare a conclusioni affrettate e dire che la primitiva di certe funzioni esiste ma non si può usare!*
Con i metodi dell'Analisi numerica si possono calcolare gli integrali con grande precisione, e presa ad esempio la funzione (dispari) detta `Integralseno`

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

se ne possono tabulare i valori in corrispondenza a generici valori di x (anche molto grandi) e quindi utilizzarla così come si utilizzano le funzioni elementari.