

Sul rango di Mordell-Weil per famiglie di varietà abeliane

Rania Wazir – Torino

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Siano K un campo finitamente generato su \mathbb{Q} e A una varietà abeliana definita su K . Il Teorema di Mordell-Weil afferma che l'insieme dei punti razionali $A(K)$ è un gruppo abeliano finitamente generato; il suo rango, detto rango di Mordell-Weil di A , è un invariante aritmetico di grande interesse, che però rimane un mistero fino a oggi.

Per esempio, nel caso di una curva ellittica (cioè di una varietà abeliana di dimensione 1) definita su \mathbb{Q} , è una congettura comune che esistono curve di rango arbitrariamente alto - però fin'ora il rango più alto trovato è 26.

Una linea di ricerca molto promettente consiste nello studiare famiglie di varietà abeliane $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ definite su un campo di numeri k (cioè π è un morfismo proprio e piatto tra varietà proiettive lisce, tale che la fibra generica \mathcal{A}_ρ è una varietà abeliana definita su $F := k(\mathcal{X})$) e di confrontare il rango di $\mathcal{A}_\rho(F)$ con il rango di \mathcal{A}_x per $x \in \mathcal{X}(k)$.

Nel caso in cui \mathcal{X} è una curva, il Teorema di Specializzazione di Silverman prova che

$$\text{rango} \mathcal{A}_\rho(F) \leq \text{rango} \mathcal{A}_x$$

per quasi ogni $x \in \mathcal{X}(k)$. La dimostrazione consiste nel misurare la variazione della funzione altezza di Weil in una famiglia di varietà abeliane definite su k . In questo intervento, dimostreremo come le funzioni altezza aritmetiche di Moriwaki possano essere utilizzate per ottenere lo stesso risultato per una famiglia $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ definita su K , fornendo così un bell'esempio della 'Height Machine' in azione.