Prodromi di una teoria delle altezze su K-algebre separabili non commutative

Valerio Talamanca – L'Aquila

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Uno degli strumenti più utili ed importanti nello studio delle proprietà aritmetiche delle varietà algebriche è quello delle "altezze". In pratica un altezza è una funzione che misura la complessità aritmetica dei punti (o sottovarietà) della varietà in questione. In particolare la costruzione di altezze normalizzate o canoniche è di grande importanza, basti pensare al ruolo giocato dall'altezza di Neron-Tate nella congettura di Birch&Swinnerton-Dyer.

Il tipo di problematica che affronteremo in questo seminario è quello che riguarda la possibilità di definire altezze, che si possano considerare come canoniche, su spazi vettoriali dotati di una struttura algebrica aggiuntiva (per esempio le K-algebre) in analogia con la costruzione di altezze canoniche su varietà algebriche proiettive dotate di una struttura algebrica aggiuntiva e cioè le varietà abeliane.

Sia K un campo di numeri e V un K-spazio vettoriale di dimensione finita. Per poter definire un altezza omogenea su V, è necessario dotare V di una qualche struttura aggiuntiva. Una delle possibili scelte di struttura è quella di usare le cosidette "*norme adeliche*". Ricordiamo che una norma adelica su V altro non è che una famiglia $\mathcal{F} = \{N_v : V_v = V \otimes_K K_v \to \mathbb{R}\,,\ v \in \mathcal{M}_K\}$ di norme che rispetta certe condizioni di compatibilità, qui $\mathcal{M}_K$ denota l'insieme standard dei valori assoluti di K. Ci preme sottolineare che le altezze omogenee che di solito vengono usate nella letteratura si possono sempre ottenere come altezze associate a norme adeliche. Il concetto di norma adelica per uno spazio vettoriale è mutuato da quello di metrica adelica introdotto da Zhang in un contesto più generale ma leggermente differente.

Una norma adelica $\mathcal{F} = \{N_v\,,\ v \in \mathcal{M}_K\}$ su una K-algebra A (o l'altezza ad essa associata) si dice compatibile con la struttura di algebra di A se la coppia $A_v = (A \otimes_K K_v,\ N_v)$ è un algebra normata per ogni $v \in \mathcal{M}_K$. Supponiamo che A sia commutativa e semisemplice. In questo eventualità abbiamo dimostrato in un precedente lavoro che su A si può definire un altezza "canonica", che denotiamo H_A, che soddisfa le seguenti proprietà:

H1 H_A è invariante per automorfismi di A come K-algebra.

H2 Sia $H_{\mathcal{F}}$ l'altezza associata ad una norma adelica $\mathcal{F}$ compatibile con la struttura di algebra di A allora:
$$\lim_{n\to\infty} H_{\mathcal{F}}(a^n)^{\frac{1}{n}} = H_A(a)$$

Lo scopo del seminario è quello di discutere una possibile generalizzazione della costruzione di H_A al caso non commutativo.