Punti interi sulle curve algebriche e congettura *abc*

Andrea Surroca – Parigi (Francia)

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Nel 1929 Siegel mostró che una curva algebrica affine non eccezionale (cioè di genere $g \geq 1$ o di genere nullo con almeno tre punti all'infinito) ha un numero finito di punti interi. (Se s è il numero dei punti al infinito, la caratteristica di Euler-Poincaré è $\chi(U) = 2-2g-s$. La curva U è non eccezionale se $\chi(U) < 0$.) Nella sua dimostrazione, Siegel utilizza il teorema di Thue-Siegel, che conduce a dei risultati non effettivi, nel senso che non produce un algoritmo per determinare l'insieme delle soluzioni. Dimostrando l'analogo p-adico del teorema di Thue-Siegel, Mahler generalizzó il risultato ai punti $S-$interi, ossia quelli che hanno i fattori primi del denominatore nell'insieme finito S.

Fino ad ora, i resultati effettivi che si conoscono sono stati ottenuti tramite il teorema di Baker sulle forme lineari di logaritmi. Questo metodo permette di maggiorare l'altezza dei punti ($S-$)interi e, almeno in teoria, di trovare i detti punti.

Elkies propose un nuovo approccio effettivo per studiare i punti razionali, ma tale approccio è congetturale, visto che si basa sulla congettura *abc* di Masser et Oesterlé.

In questo seminario descriveremo alcuni legami tra le stime superiori dell'altezza dei punti $S-$interi e la congettura *abc*.

La congettura *abc* su $\mathbf{Q}$ afferma che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $c_\varepsilon > 0$ tale che per ogni terna (a, b, c) di numeri razionali non nulli e tali che $a + b = c$, l'altezza $h(a, b, c) = \log \max\{|a|, |b|, |c|\}$ sia inferiore a $(1 + \varepsilon)r + c_\varepsilon$, dove r rappresenta il "radicale" di (a, b, c), ossia la somma dei logaritmi dei numeri primi che dividono *abc*.

Seguendo le idee di Elkies e supponendo vera la congettura *abc* estesa a ogni campo di numeri, otteniamo una stima superiore, uniforme in S, per l'altezza dei punti $S-$interi di ogni curva U che verifica $\chi(U) < 0$.

Reciprocamente, una stima uniforme in S per i punti $S-$interi permette di ottenere un risultato nella direzione della congettura *abc*. Precisamente, data una curva affine U definita su un campo di numeri K e tale che $\chi(U) < 0$, e una funzione altezza h definita su U ed associata a un divisore di grado 1, facciamo l'ipotesi seguente e dimostriamo il teorema qui sotto.

Siegel (U,K). *Per ogni intero naturale* $\delta > 0$, *esistono dei numeri reali* $k_1(U, h, \delta) > 1, k_2(U, h, \delta) > 0$ *e* $k_3(U, h, \delta) > 0$ *tali che, per ogni estensione finita* L/K *di grado* $[L : \mathbf{Q}] \leq \delta$, *per ogni insieme finito* S *di valutazioni ultrametriche di* L *e per ogni punto* $S-$*intero* x *di*

U, abbiamo

$$h_L(x) \leq k_1 \sum_{\ell \in S} \log N_{L/\mathbf{Q}}(\ell) + k_2 \log d_L + k_3,$$

dove d_L è il valore assoluto del discriminante del campo L e $h_L = [L : \mathbf{Q}]h$.

Teorema. *Sia U una curva algebrica affine su K tale che $\chi(U) < 0$ e h una funzione altezza definita su U ed associata a un divisore di grado 1.*

L'ipotesi Siegel (U,K) implica una versione della congettura abc dove l'altezza di (a, b, c) è maggiorata da una funzione esplicita lineare nel "radicale" di (a, b, c).

Per concludere citeremo delle applicazioni di questo teorema.