Equazioni diofantee per polinomi ortogonali

Thomas Stoll – Graz (Austria)

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Fissiamo in anticipo una famiglia arbitraria di polinomi $\{p_k(x)\}$ con $p_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ e $\deg p_k(x) = k$. Un problema interessante nel campo della teoria dei numeri è il seguente:

Si determinino le condizioni per le quali l'equazione diofantea

$$\mathcal{A}\, p_m(x) + \mathcal{B}\, p_n(y) = \mathcal{C} \tag{1}$$

con $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{AB} \neq 0$, $m > n \geq 2$ *amette un numero finito oppure un numero infinito di soluzioni intere* (x, y).

Questo problema generale contiene anche dei problemi classici, per esempio l'equazione diofantea

$$m! \binom{x}{m} - n! \binom{y}{n} = 0$$

ossia la questione se esiste un numero finito oppure infinito di numeri interi (x, y) tali che le loro progressioni decrescenti di lunghezza m e rispettivamente n hanno prodotti uguali. Per decidere il problema (1) per polinomi fissati $p_n(x)$ e $p_m(x)$ possiamo usare il famoso teorema di Siegel. Purtroppo dobbiamo sempre calcolare il genus della curva algebrica definita da (1). Questo è difficile in quanto vogliamo esaminare famiglie polinomiali che *per se* dipendono da parametri; per esempio, se denotiamo con $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ i polinomi di Jacobi ortogonali rispetto alla funzione $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$:

$$\mathcal{A}\, P_m^{(\alpha,\beta)}(x) + \mathcal{B}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(y) = \mathcal{C}.$$

Recentemente Bilu e Tichy hanno combinato i risultati parziali di Ritt, Fried *et. al* per fornire un criterio piú esplicito per solvere il problema (1).

Nella prima parte del seminario descriveremo il teorema di Bilu e Tichy e noteremo le implicazioni per famiglie polinomiali che hanno zeri semplici reali e soddisfano una certa monotonia dei punti estremali. Le riduzioni ottenute per questa classe di famiglie polinomiali ci permette di studiare famiglie di polinomi classici continui ortogonali (Jacobi $\{P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, Gegenbauer $\{C_k^{(\lambda)}(x)\}$, Legendre $\{P_k(x)\}$, Chebyshev $\{T_k(x)\}$, Laguerre $\{L_k^{(\alpha)}(x)\}$, Hermite $\{H_k(x)\}$) perché queste soddisfano entrambe le due condizioni.

Nella seconda parte dell'intervento vorrei esporre i risultati recentemente ottenuti da Tichy e l'autore. Proviamo la finitezza in (1) con $m, n \geq 4$ per tutte le famiglie di polinomi classici continui ortogonali con una interessante esclusione, famosa per le sue proprietà analitiche: i polinomi di Chebyshev $\{T_k(x)\}$.

Concluderemo il seminario con la domanda (1) per polinomi classici discreti ortogonali (Meixner $\{M_k^{(\beta,c)}(x)\}$, Krawtchouk $\{K_k^{(p,N)}(x)\}$ etc.) ed altri problemi.