Equazioni e disequazioni diofantee esponenziali

Amedeo Scremin – Graz (Austria)

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Si consideri l'anello delle somme di potenze con coefficienti algebrici e radici intere positive, cioè delle funzioni complesse di $\mathbb{N}$ della forma

$$G_n = a_1\alpha_1^n + a_2\alpha_2^n + \ldots + a_t\alpha_t^n, \tag{1}$$

con $a_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_t \in \mathbb{Z}^+$.

Fin dagli anni '70 le equazioni Diofantee contenenti somme di potenze sono state affrontate con l'uso delle stime di A. Baker per le forme lineari in logaritmi, lasciando però irrisolti molti problemi. Recentemente P. Corvaja e U. Zannier hanno aperto una nuova via per affrontare tali problemi, grazie all'applicazione in questo contesto del Teorema del Sottospazio di W. Schmidt. In questo intervento prima esporremo i risultati ottenuti con tale metodo, per poi passare ad illustrare nuovi risultati raggiunti dall'autore, parzialmente insieme a C. Fuchs.

Il primo fra questi risultati riguarda la finitezza delle soluzioni $(n, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$F(G_n, y) = f(n),$$

dove $F(x, y) \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$ è monico, assolutamente irriducibile e di grado almeno 2 e $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ e G_n sono non costanti.

Successivamente considereremo casi in cui appaiono più somme di potenze come, ad esempio, l'equazione

$$F(n, y) = G_n^{(0)}y^d + G_n^{(1)}y^{d-1} + \ldots + G_n^{(d-1)}y + G_n^{(d)} = 0 \tag{2}$$

e la disequazione

$$\Big|F(n, y)\Big| < \alpha^{n(d-1-\epsilon)}, \tag{3}$$

con $\epsilon > 0$, F monico in y e

$$\alpha = \max_{i=1,\ldots,d} \left(\alpha_1^{(i)}\right)^{\frac{1}{i}}.$$

Mostreremo che, sotto opportune ipotesi, per tutte le soluzioni di (2), a parte un numero finito, y è facilmente parametrizzabili con un insieme finito di somme di potenze. Anche per (3) giungeremo ad una simile conclusione.

Tutti questi risultati costituiscono generalizzazioni di quelli ottenuti da P. Corvaja e U. Zannier su tali problemi.