

Sistemi differenziali e stime di molteplicità

Federico Pellarin – Caen (Francia)

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Sia q un numero complesso tale che $|q| < 1$, si considerino le serie

$$\begin{aligned}E_2 &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \\E_4 &= 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \\E_6 &= 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n,\end{aligned}$$

e la derivazione $D = \frac{qd}{dq}$. L'anello $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ è chiuso rispetto a D . Nesterenko ha dimostrato che se $\mathcal{P}$ è un ideale primo D -stabile di $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$, tale che

$$\mathcal{P}(q \mapsto 0) = (0),$$

allora $\Delta = (E_4^3 - E_6^2) \in \mathcal{P}$. Questa proprietà elementare, che chiamiamo “proprietà di Ramanujan in $q = 0$ ” (e che sarà ridefinita più precisamente nel seminario), è cruciale nel teorema che segue.

Teorema (Nesterenko). Esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[q, E_2, E_4, E_6]$ di grado inferiore o uguale a σ , si ha:

$$\text{ord}_{q=0} P(q, E_2, E_4, E_6) \leq c\sigma^4.$$

Questo teorema è essenziale ad esempio, nella dimostrazione dell'indipendenza algebrica dei numeri π e e^π , compiuta dallo stesso Nesterenko.

Presenteremo dei risultati simili al teorema di cui sopra, per altri sistemi differenziali. In particolare, certi sistemi differenziali associati a una classe di polinomi in forme modulari di Hilbert (definite su $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, dove $\mathcal{H}$ è il semipiano superiore complesso), soddisfano la proprietà di Ramanujan (in punti o sottovarietà analitiche qualunque).

Euristicamente, un ideale primo differenzialmente stabile contiene sempre una certa forma modulare “sorella” della forma Δ di Jacobi.

Possiamo dedurre dalla proprietà di Ramanujan, delle stime di molteplicità per polinomi in forme modulari, più o meno precise (secondo il sistema differenziale sottostante), ma in ogni caso inaccessibili attraverso le sole tecniche introdotte da Nesterenko per studiare questa proprietà.

A questo fine, introdurremo un “braket multiplo” sulle forme modulari che generalizza il braket di Rankin in una direzione ortogonale a quella dei cosiddetti “braket di Rankin-Cohen”, e che dovrebbe avere un interesse indipendente dallo studio delle stime di molteplicità.