Su alcune successioni di interi

Giuseppe Melfi – Neuchâtel (Svizzera)

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Numeri pratici. Un numero m è pratico se ogni intero $n < m$ è esprimibile come somma di divisori distinti di m. È noto che i numeri pratici hanno un comportamento simile a quello dei numeri primi. Ogni numero pari può essere espresso come somma di due numeri pratici. Altri risultati di questo tipo sono stati dimostrati in questi anni. In particolare Saias ha dimostrato che, detta $p(x)$ la funzione enumeratrice dei numeri pratici, si ha

$$c_1 \frac{x}{\log x} < p(x) < c_2 \frac{x}{\log x}.$$

Il problema della determinazione della costante c tale che $p(x) \sim cx/\log x$ rimane aperto.

Successioni sum-free. Si dice che una successione crescente di interi positivi è sum-free se ogni elemento non può essere espresso come una somma di altri elementi distinti. Nel 1962 Erdős ha dimostrato che esistono successioni sum-free tali che $n_k < k^{3.5}$. L'esponente è stato abbassato a 3 nel 1999, e per finire Luczak e Schoen hanno dimostrato che l'esponente ottimale è 2. Un problema aperto è il seguente. Sia

$$R = \sup_{n_k \ \text{sum-free}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}.$$

Oggi si sa solo che $2.064 < R < 3.999$.

Somme di potenze di interi. Un problema sollevato da Erdős nel 1996 è il seguente. Dimostrare che l'insieme delle somme di potenze distinte di 3 e di 4 ha densità asintotica positiva. Si conoscono alcuni risultati correlati, ma su questo problema specifico si sa che se $p_{\{3,4\}}(x)$ è la funzione enumeratrice,

$$p_{\{3,4\}}(x) \gg x^{0.9659}.$$

Espansioni binarie simultanee. Sia S l'insieme degli interi n tali che $B(n) = B(n^2)$, dove $B(n)$ è la somma delle cifre nell'espansione binaria di n, e sia $p_S(x)$ la funzione enumeratrice. Si congettura che

$$p_S(x) \sim x^{\alpha + o(1)}$$

con $\alpha = \log 1.6875/\log 2 \simeq 0.7548875$. Attualmente si sa che

$$x^{0.025} < p_S(x) < x^{0.9183}.$$