Stime per l'insieme eccezionale in intervalli corti di due problemi additivi con numeri primi

Alessandro Languasco – Padova

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Il primo risultato che presento riguarda la congettura di Goldbach. Sia $E = \{2n : 2n$ non è somma di due numeri primi$\}$ l'insieme eccezionale per la congettura di Goldbach. Sia X un parametro sufficientemente grande e sia $E(X) = E \cap [1, X]$. Nel 1975 Montgomery e Vaughan provarono che

Teorema 1 (Montgomery-Vaughan, 1975) *Esiste una costante effettivamente computabile $\delta > 0$ tale che*

$$|E(X)| \ll X^{1-\delta}.$$

La dimostrazione di Montgomery-Vaughan utilizza il metodo di Hardy e Littlewood in cui particolare attenzione viene prestata alla stima del contributo fornito dal possibile zero di Siegel di una funzione L di Dirichlet.

Sia ora $E(X, H) = E \cap [X, X + H]$, dove $H = o(X)$. Nei primi anni '80 Luo-Yao and Yao provarono che $|E(X, H)| \ll H^{1-\delta}$ per $X^{\frac{7}{12}+\delta} \le H \le X$. Recentemente Peneva ha dimostrato che la stima precedente vale nell'intervallo $X^{\frac{1}{3}+\delta} \le H \le X$. Questo risultato è stato successivamente migliorato dall'autore:

Teorema 2 (Languasco, 2003) *Esiste una costante effettivamente computabile $\delta > 0$ tale che, per $H \ge X^{\frac{7}{24}+7\delta}$, si ha*

$$|E(X, H)| \ll H^{1-\delta/600}.$$

L'articolo è in corso di pubblicazione su Monatsh. Math. Gli ingredienti necessari consistono essenzialmente nell'introdurre una opportuna valutazione del contributo individuale degli zeri delle funzioni L di Dirichlet locati in una sottile striscia vicina alla linea $\Re(s) = 1$.

Il secondo risultato che presento riguarda la congettura di Hardy e Littlewood. Nel 1923 Hardy e Littlewood congetturarono che ogni intero sufficientemente grande è o una potenza k-esima di un intero o la somma di un primo e di una potenza k-esima di un intero, per $k = 2, 3$. Sia X un parametro sufficientemente grande. Sia inoltre E_k l'insieme degli interi che non sono né la somma di un primo e una potenza né la potenza di un intero, $E_k(X) = E_k \cap [1, X]$ e $E_k(X, H) = E_k \cap [X, X + H]$, dove $H = o(X)$.

Alla fine degli anni '80 Brünner-Perelli-Pintz e A.I. Vinogradov provarono indipendentemente che esiste una costante $\delta > 0$ tale che

$$|E_2(X)| \ll X^{1-\delta}.$$

Successivamente Zaccagnini provò che tale risultato è valido anche nel caso generale $k \geq 2$. A differenza del problema precedente non esistevano risultati in intervalli corti in cui si riuscisse a "salvare" una potenza di H, ma ve ne erano (Mikawa, Perelli-Pintz, Perelli-Zaccagnini) in cui la stima per $E(X, H)$ era del tipo $H \log^{-A} X$ per H in opportuni intervalli.

Recentemente l'autore è stato in grado di salvare una potenza di H nella stima di $|E_k(X, H)|$, $k \geq 2$, per H in un opportuno intervallo.

Teorema 3 (Languasco) *Sia $k \geq 2$ una intero fissato e sia $K = 2^{k-2}$. Allora esiste una costante effettivamente computabile $\delta > 0$ tale che si ha*

$$|E_k(X, H)| \ll H^{1-\delta/(5K)}$$

per $H \geq X^{7/12(1-\frac{1}{k})+\delta}$.

L'articolo è in corso di pubblicazione su Tsukuba J. Math. La maggior ampiezza dell'intervallo in H rispetto a quella del risultato precedente dipende dalla maggiore regolarità della successione delle potenze rispetto a quella dei primi. Le tecniche utilizzate sono analoghe al caso precedente, sebbene in questo caso maggiore accuratezza vada posta alla scelta della regione zero-free per le funzioni L di Dirichlet, al corrispondente fenomeno di Deuring-Heilbronn nonché al trattamento in intervalli corti della serie singolare.