Serie theta e operatore traccia

Francesco Chiera – Heidelberg (Germania)

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Sia Γ un sottogruppo di congruenza di $Sp(n,\mathbb{Z})$. Si denoti con $[\Gamma,\rho,\chi]$ lo spazio delle forme modulari relative a Γ rispetto alla rappresentazione razionale $\rho=[\rho_0,r]$ e sistema di moltiplicatori χ. Come è noto, fissati Γ, ρ e χ, è possibile costruire famiglie di forme modulari in $[\Gamma,\rho,\chi]$ considerando opportune serie theta relative a forme quadratiche razionali definite positive ed eventualmente munite delle necessarie *caratteristiche*. In particolare, tali costruzioni sono semplici ed esplicite nel caso dei sottogruppi di congruenza appartenenti alle classi classicamente più rilevanti quali i sottogruppi di Hecke $\Gamma_{n,0}[q]$, i sottogruppi principali di congruenza $\Gamma_n[q]$, o i sottogruppi di Igusa $\Gamma_n[q,2q]$. Sia dunque $\Theta[\Gamma]_\rho\subset[\Gamma,\rho,\chi]$ il sottospazio generato da queste opportune serie theta.

Se inoltre si considera una coppia di sottogruppi di congruenza $\Gamma'\supset\Gamma$ e una coppia di sistemi di moltiplicatori χ' su Γ' e χ su Γ tali che $\chi'|_\Gamma=\chi$, è naturale chiedersi se valga la seguente relazione:

$$\Theta[\Gamma]_\rho\cap[\Gamma',\rho,\chi']=\Theta[\Gamma']_\rho\,. \tag{1}$$

Va sottolineato come una motivazione specifica per lo studio di tale questione provenga da alcuni risultati della teoria adelica delle rappresentazioni automorfe riguardo ai cosiddetti *theta liftings*. Infatti, in molti casi da tali risultati segue la rappresentabilità di forme modulari come combinazione lineare di serie theta. Purtroppo però in questo modo non è possibile fornire alcuna condizione sul tipo di serie theta coinvolte, ovvero sul *livello* delle relative forme quadratiche e dei coefficienti delle caratteristiche. Diviene dunque interessante capire se sia possibile trasformare combinazioni lineari di serie theta "generiche" in combinazioni lineari delle serie theta opportune per il particolare sottogruppo di congruenza che si prende in esame.

Il problema (1) può essere riformulato in termini differenti introducendo il cosiddetto *operatore traccia*. Questo altro non è che una simmetrizzazione; ovvero, data $f\in[\Gamma,\rho,v]$, esso è semplicemente definito come segue:

$$Tr^{\Gamma,v}_{\Gamma',v'}f=\frac{1}{[\Gamma':\Gamma]}\sum_{g\in\Gamma\backslash\Gamma'}v'(g)^{-1}\,f|_\rho g\,.$$

Si è allora condotti a studiare se sia possibile esprimere l'immagine di una serie theta in $\Theta[\Gamma]_\rho$ sotto l'azione dell'operatore traccia come una combinazione lineare di serie theta in $\Theta[\Gamma']_\rho$.

In effetti, mi limiterò ad esaminare i seguenti due casi:

i) $\Gamma_{n,0}[q] \supset \Gamma_n[q]$;

ii) $\Gamma_n[N] \supset \Gamma_n[q]$ per coppie di interi dispari $N|q$.

La strategia che adotto si basa in entrambe i casi sulla dimostrazione di certe formule di commutazione fra l'operatore traccia e l'operatore Φ di Siegel. Procedendo in questo modo, riesco a spostare il problema dal dato grado n al *caso singolare* e a fornire, sotto certe condizioni, una risposta affermativa al problema in esame. In effetti, le condizioni compaiono solo nel secondo caso, incontrandosi qui una ostruzione che dipende dall'annullamento di un coefficiente nella relativa formula di commutazione. La presenza di tale ostruzione ha un significato che può essere e verrà descritto. Inoltre, essa è coerente con dei risultati analoghi che sono stati dimostrati da S. Böcherer, J. Funke e R. Schulze Pillot nel caso di coppie di sottogruppi di Hecke di differente livello.