Numeri primi tra quadrati consecutivi

Danilo Bazzanella – Torino

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Una nota congettura sulla distribuzione dei numeri primi asserisce che tra due quadrati consecutivi è sempre compreso almeno un numero primo. Attualmente non è nota alcuna dimostrazione di tale fatto, nemmeno assumendo ipotesi forti sulla distribuzione dei primi come l'Ipotesi di Riemann o la Congettura di Montgomery.

L'unica prova condizionale della congettura è dovuta a Goldston che, nel suo lavoro del 1990, ha dedotto la congettura sui primi tra quadrati consecutivi assumendo una versione forte della Congettura di Montgomery.

Il mio contributo allo studio di tale questione è una nuova prova condizionale della congettura che, nonostante l'assunzione di una ipotesi più debole di quella di Goldston, implica un risultato più forte sulla distribuzione dei primi in intervalli del tipo $[n^2, (n+1)^2]$. A tale fine si definisca la seguente congettura.

Congettura 1 *Posto* $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p$ *e* $J(N,h) = \displaystyle\int_1^N (\vartheta(x+h) - \vartheta(x) - h)^2 \, dx$, *si ha*

$$J(N+Y, h) - J(N,h) = o(hN),$$

uniformemente per $1 \le Y \le N^{1/2}$ *e* $N^{1/2} \ll h \ll N^{1/2}$.

Il mio risultato principale è il seguente teorema.

Teorema *Si assuma la Congettura 1. Gli intervalli del tipo* $[n^2, (n+1)^2]$ *contengono il numero atteso di primi per* $n \to \infty$.