Congettura di Greenberg per $\mathbb{Z}_p^d$-estensioni

Andrea Bandini – Pisa

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Sia p un numero primo. Sia k un campo di numeri e sia $\tilde{k}$ la composizione di tutte le $\mathbb{Z}_p$-estensioni di k, in modo che $Gal(\tilde{k}/k) \simeq \mathbb{Z}_p^d$ per qualche $d \leq [k : \mathbb{Q}]$. Siano $k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n \subset \ldots$ campi di numeri tali che $\tilde{k} = \bigcup k_n$ e sia A_{k_n} la p-parte del gruppo delle classi di k_n. Tramite le mappe naturali di norma ed inclusione possiamo definire

$$\varprojlim_n A_{k_n} \stackrel{def}{=} Y_{\tilde{k}} \quad \text{e} \quad \varinjlim_n A_{k_n} \stackrel{def}{=} A_{\tilde{k}} \ .$$

Sia $L_{\tilde{k}}$ la massima pro-p-estensione abeliana non ramificata di $\tilde{k}$. La class field theory e la teoria di Galois forniscono un isomorfismo $Y_{\tilde{k}} \simeq Gal(L_{\tilde{k}}/\tilde{k})$. Quindi $Gal(\tilde{k}/k)$ agisce tramite coniugio su $Y_{\tilde{k}}$ e $Y_{\tilde{k}}$ ha una struttura naturale di modulo su $\mathbb{Z}_p[[Gal(\tilde{k}/k)]] \stackrel{def}{=} \Lambda_d$. Sfruttando un teorema di struttura per Λ_d-moduli R. Greenberg ha dimostrato che $Y_{\tilde{k}}$ è un Λ_d-modulo di torsione e, sulla base di numerosi esempi, ha formulato la seguente
Congettura (2001) *$Y_{\tilde{k}}$ è un Λ_d-modulo pseudo-nullo (i.e. il suo annullatore ha altezza ≥ 2).*
Tale enunciato generalizza la classica congettura sugli invarianti λ e μ di Iwasawa per una $\mathbb{Z}_p$-estensione di un campo totalmente reale. Infatti un Λ_1-modulo è pseudo-nullo se e solo se è finito e, per una $\mathbb{Z}_p$-estensione, questo equivale a $\lambda = \mu = 0$.
La congettura (con $p \neq 2$) è stata verificata per molti campi quadratici (reali ed immaginari) e per alcuni campi ciclotomici.
Usando i risultati noti per i campi quadratici verificheremo la congettura per numerosi campi biquadratici e, più in generale, per campi k con $Gal(k/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.
Inoltre la congettura è in stretta relazione con il problema del comportamento degli ideali nella torre di estensioni $\tilde{k}/k$. Si dimostra che se $Y_{\tilde{k}}$ è pseudo-nullo allora $A_{\tilde{k}} = 0$ cioè gli ideali "capitolano" (i.e. diventano principali) in $\tilde{k}$. Per tutti i campi k non totalmente reali per i quali riusciamo a verificare la congettura, dimostreremo che è possibile trovare una $\mathbb{Z}_p^2$-estensione K, contenuta in $\tilde{k}$, nella quale gli ideali sono già principali (vedremo anche come questo sia un risultato ottimale).