Monodromia p-adica, filtrazioni sugli F-cristalli e formule p-adiche

Francesco Baldassarri – Padova

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

Sia X una curva liscia su un corpo k perfetto di caratteristica $p > 0$. La corrispondenza di Katz stabilisce una naturale equivalenza tra la categoria delle rappresentazioni lineari del gruppo fondamentale étale $\pi_1(X)$ e la categoria degli F-iso-cristalli a radici unità. Aggiungendo l'ipotesi di surconvergenza all'infinito, si isolano le rappresentazioni "quasi-unipotenti" all'infinito, quelle cioè in cui l'inerzia del gruppo fondamentale di ogni punto all'infinito, agisce attraverso un quoziente finito.

È opportuno studiare più in generale la categoria degli F-iso-cristalli surconvergenti. Grazie ai recenti risultati di André, Mebkhout e Kedlaya, tutti questi F-iso-cristalli sono quasi-unipotenti all'infinito, nel senso che esiste, localmente in ogni punto all'infinito, un ricoprimento étale su cui essi divengono estensioni iterate di *twists* alla Tate di F-iso-cristalli surconvergenti a radici unità. Appoggiandoci sul lavoro di Kedlaya, possiamo chiarire che *se il poligono di Newton di un F-iso-cristallo surconvergente è ovunque (anche all'infinito!) costante, allora il cristallo è globalmente estensione iterata di twists alla Tate di F-iso-cristalli surconvergenti a radici unità.* Questo può venire applicato, fra l'altro, a giustificare formule p-adiche del tipo di quella di Koblitz-Diamond per la continuazione analitica della funzione $\mathcal{F}(a,b,c;\lambda)$ ottenuta dalla classica funzione ipergeometrica di Gauss $F(a,b,c;\lambda)$, for a, b, $c \in \mathbf{Z}_p$, $c \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$. Questa funzione è l'estensione p-adica massimale del rapporto

$$\frac{F(a,b,c;\lambda)}{F(a',b',c';\lambda^p)} \in 1 + \lambda \mathbf{Q_p}[[\lambda]]$$

ove per $a \in \mathbf{Z}_p$, $a' \in \mathbf{Z}_p$ è definito unicamente dalla condizione che $pa' - a = \mu_a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Definiamo anche ricorsivamente $a^{(0)} = a$, e $a^{(i+1)} = (a^{(i)})'$, per $i = 0, 1, \ldots$. La formula di Koblitz-Diamond asserisce che, se $\mu_{c^{(i)}} > \mu_{a^{(i)}} + \mu_{b^{(i)}}$ per ogni $i = 0, 1, \ldots$, allora $\mathcal{F}(a,b,c;\lambda)$ si estende analiticamente nel disco aperto di raggio 1 attorno a $\lambda = 1$ e

$$\mathcal{F}(a,b,c;1) = \frac{\Gamma_p(c)\Gamma_p(c-a-b)}{\Gamma_p(c-a)\Gamma_p(c-b)}$$

(ove Γ_p denota la funzione gamma p-adica di Morita).

Il contenuto "motivico" di questo tipo di formule, è da chiarire.

Naturalmente, quanto detto mostra che in caratteristica p i fenomeni più interessanti, perché più diversi dal caso complesso, si verificano *precisamente* quando le ipotesi del risultato qui descritto *non* sono verificate. In tali casi il poligono di Newton è diverso da quello generico in un numero finito di punti detti il "luogo supersingolare". In caratteristica p dunque il fenomeno più interessante è la *monodromia attorno alle fibre supersingolari*, come intuito da Washnitzer e spiegato da Dwork. Su questo torneremo in un'altra occasione.