Minorazione dell'altezza normalizzata in una potenza del gruppo moltiplicativo

Francesco Amoroso – Caen (Francia)

Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri
Parma, 13–15 Novembre 2003

La nozione di "altezza" ha un ruolo fondamentale in teoria dei numeri. L'esempio più semplice è l'altezza di Weil di un intero algebrico:

$$h(\alpha) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]} \sum \log|\sigma\alpha| \ ,$$

dove la somma è fatta sull'insieme dei coniugati algebrici di α di modulo > 1. L'altezza di Weil si estende facilmente al gruppo moltiplicativo $\overline{\mathbb{Q}}^*$ e soddisfa numerose buone proprietà. Per esempio: $h(\alpha^n) = nh(\alpha)$ $(n \in \mathbb{N})$ e $h(\alpha) = 0$ se e solo se α è di torsione (ovverosia se e soltanto se α è una radice dell'unità).

La nozione di altezza si generalizza in differenti modi: è possibile ad esempio definire un'altezza normalizzata per sottovarietà algebriche di alcuni gruppi algebrici, che soddisfi come prima delle buone proprietà rispetto alla struttura di gruppo. In questo seminario ci occuperemo esclusivamente dell'altezza normalizzata di sottovarietà di una potenza del gruppo moltiplicativo. Per sottovarietà V di $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^n$ intenderemo l'intersezione di una sottovarietà algebrica di $\mathbb{P}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ con $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^n$; il grado di V sarà allora il grado (in senso usuale) della chiusura di Zariski di V in $\mathbb{P}_n(\overline{\mathbb{Q}})$. Per altezza di un punto $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^n$ intenderemo l'altezza di Weil di $(1, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{P}_n(\overline{\mathbb{Q}})$, che generalizza in maniera naturale l'altezza di un numero algebrico: si ha quindi una nozione di altezza per varietà di dimensione zero, che è possibile generalizzare ad una varietà V di dimensione positiva con una costruzione simile a quella dell'altezza di Neron–Tate su una curva ellittica. L'altezza di V così definita si chiama "altezza normalizzata" e si indica $\hat{h}(V)$. Essa è strettamente legata ad un'altra quantità introdotta da Szpiro e ben più semplice da definire: il "minimo essenziale". Sia V una sottovarietà di $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^n$ e sia θ un reale positivo. Denotiamo con $V(\theta)$ l'insieme dei punti di V di altezza $< \theta$. Si definisce allora minimo essenziale di V il numero reale:

$$\hat{\mu}^{\text{ess}}(V) = \inf\{\theta > 0 \text{ t.c. } V(\theta) \text{ è Zariski denso in } V\} \ .$$

Il minimo essenziale fornisce una prima informazione sulla distribuzione dei punti di altezza piccola di V. Il quoziente tra altezza e grado di V è (per un caso particolare di un teorema di Zhang) comparabile al minimo essenziale della varietà; precisamente:

$$\frac{\hat{h}(V)}{(\dim(V)+1)\deg(V)} \leq \hat{\mu}^{\text{ess}}(V) \leq \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} \ ,$$

dove $\hat{h}(V)$ e $\hat{\mu}^{\text{ess}}(V)$ designano rispettivamente l'altezza normalizzata ed il minimo essenziale di V.

È ben noto che le sottovarietà hanno altezza (o minimo essenziale) non negativa, nulla se e soltanto se sono sottovarietà di torsione (riunione di traslati di sottogruppi per punti di torsione). In questo seminario descriveremo brevemente le minorazioni ottenute in collaborazione con S. David (Paris VI) per il minimo essenziale di una sottovarietà definità sui razionali e non di torsione. Queste minorazioni sono state recentemente estese al caso "geometrico", dove non si fanno più ipotesi sul campo di definizione della sottovarietà ma si suppone che essa non sia riunione di traslati di sottogruppi (per punti eventualmente di ordine infinito).

Descriveremo quindi alcuni risultati più precisi sulla distribuzione dei punti di altezza piccola di una sottovarietà V. Nel caso aritmetico (V definita sui razionali) è possibile adattare i metodi sviluppati per minorare l'estremo inferiore dell'altezza su V^*, complementare in V dell'unione delle sottovarietà di torsione contenute in V. Similmente, nel caso geometrico ci si interessa ai punti altezza piccola di V^0, complementare in V dell'unione dei traslati di sottogruppi di dimensione ≥ 1 contenuti in V. Si ottiene in questo caso una stima per l'estremo inferiore dell'altezza su V^0 privato di un numero finito di punti.

Termineremo il seminario con una lista di problemi ancora aperti in questo campo di ricerca.