Introduzione alla teoria dei semigruppi

Alessandra Lunardi

Corso di Equazioni di Evoluzione, Secondo Semestre, a.a. 2014/15

Indice

Introduzione

Queste sono le note di un corso semestrale di introduzione alla teoria dei semigruppi di operatori in spazi di Banach e delle equazioni di evoluzione lineari in spazi di Banach, dette equazioni astratte.

Il primo importante risultato di tale teoria è il teorema di Hille-Yosida sui *semigruppi fortemente continui*, che sarà dimostrato nel capitolo 3. L'importanza di questo teorema non è solo storica. Infatti è un teorema molto generale che si applica a una vasta classe di problemi, che include equazioni e sistemi differenziali iperbolici (del tipo dell'equazione delle onde), parabolici (del tipo dell'equazione del calore), equazioni e sistemi integro-differenziali (del tipo delle equazioni di evoluzione delle popolazioni con struttura di età). Come tutti i teoremi molto generali non dà però informazioni particolarmente precise nei singoli casi specifici in cui viene applicato. In particolare per quanto riguarda le equazioni di tipo parabolico avremo bisogno di studiare in dettaglio una classe di semigruppi detti *semigruppi analitici* (capitolo 4).

Vediamo in un esempio concreto in cosa consistono i metodi astratti nelle equazioni a derivate parziali. Uno degli esempi piú semplici fra quelli significativi è l'equazione del calore,

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(t,x), \;\; 0 < t \leq T, \; 0 \leq x \leq 1, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \;\; 0 \leq x \leq 1, \\ \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{1}$$

L'incognita è la funzione u, mentre f e u_0 sono dati. Il metodo che seguiremo sarà quello di vedere l'equazione (1) come equazione di evoluzione in un opportuno spazio di Banach, di studiarla usando risultati per equazioni astratte, e di interpretare poi tali risultati in termini del problema iniziale. Poniamo

$$u(t,\cdot) = U(t), \;\; f(t,\cdot) = F(t), \;\; 0 \leq t \leq T,$$

cosicché, per ogni $t \in [0,T]$, $U(t)$ e $F(t)$ sono funzioni della variabile x appartenenti a un opportuno spazio di Banach X. La scelta di X dipende dal tipo di risultati che cerchiamo, o dalla regolarità dei dati. Per esempio, se f e u_0 sono continue una scelta naturale è $X = C([0,1])$, se $f \in L^p((0,T) \times (0,1))$ e $u_0 \in L^p(0,1)$, $p \geq 1$, una scelta naturale è

$X = L^p(0,1)$. Fatta questa scelta, scriviamo (1) nella forma

$$\begin{cases} U'(t) = Au(t) + F(t), & 0 < t \le T, \\ \\ U(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

dove A è la realizzazione della derivata seconda con condizione al bordo di Dirichlet (cioè consideriamo funzioni che si annullano per $x = 0$ e per $x = 1$) nello spazio X scelto. Per esempio, se $C([0,1])$ allora

$$D(A) = \{\varphi \in C^2([0,1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \;\; (A\varphi)(x) = \varphi''(x).$$

Il problema (2) è un problema di Cauchy per una equazione differenziale lineare nello spazio di Banach $X = C([0,1])$. Per queste equazioni non si generalizza in modo ovvio la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, perché l'operatore A è definito su un sottospazio proprio di X, e non è continuo. Si sfrutta invece una proprietà spettrale di A, che è la seguente: l'insieme risolvente di A contiene un settore $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, \; |\arg \lambda| < \theta\}$, con $\theta > \pi/2$ (per la precisione, consiste di una successione di autovalori reali negativi), e inoltre

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{|\lambda|}, \;\; \lambda \in S. \tag{3}$$

Questa proprietà ci permetterà di costruire la soluzione del problema di Cauchy omogeneo (cioè con $F = 0$), che per analogia col caso finito dimensionale chiameremo $e^{tA}u_0$. Per ogni $t \ge 0$ fissato l'applicazione $u_0 \mapsto e^{tA}u_0$ è lineare e continua. La famiglia di operatori $\{e^{tA} : \; t \ge 0\}$ viene detta *semigruppo analitico*: semigruppo perché gode delle proprietà

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \; \forall t, s \ge 0, \;\; e^{0A} = I,$$

analitico perché si dimostra che la funzione $(0, +\infty) \mapsto \mathcal{L}(X)$, $t \mapsto e^{tA}$ è analitica.

Vedremo poi che la soluzione di (2) nel caso generale è data dalla formula di variazione delle costanti

$$U(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s)ds, \;\; 0 \le t \le T,$$

usando la quale potremo studiare le proprietà della soluzione di (2), e ricordando che $U(t) = u(t, \cdot)$ anche quelle di u.

Uno degli studi che potremo portare bene fino in fondo è quello del comportamento asintotico per $t \to +\infty$ (ovviamente, nel caso in cui F sia definita in $[0, +\infty)$). I risultati sul comportamento asintotico che vedremo hanno interesse anche nel caso in cui X sia di dimensione finita, e anch'essi sono legati in modo essenziale alle proprietà spettrali di A.

Vista la natura dei problemi di cui ci occuperemo, il primo capitolo è dedicato a funzioni, di variabile reale o complessa, con valori in spazi di Banach, e a richiami su operatori lineari in spazi di Banach e su equazioni differenziali lineari. Inoltre, vista l'importanza delle proprietà spettrali di A, il secondo capitolo è dedicato a spettro, risolvente, e proprietà spettrali varie, di operatori lineari chiusi in spazi di Banach. Il cuore del corso è nei capitoli 3 e 4, in cui sono trattati rispettivamente semigruppi fortemente continui e semigruppi analitici.

Il corso è il piú possibile elementare ed autosufficiente; gli unici prerequisiti sono il calcolo per funzioni di una o piú variabili, le prime nozioni di variabile complessa, e un minimo di dimestichezza con gli spazi di Banach e gli operatori lineari in spazi di Banach. Fra gli esempi e gli esercizi ce ne sono vari che riguardano spazi L^p e spazi di Sobolev $W^{1,p}$, $W^{2,p}$. La conoscenza di questi spazi e delle loro proprietà fondamentali è molto utile dato che permette di arricchire il panorama delle applicazioni della teoria generale, tuttavia non è indispensabile per la comprensione della maggior parte del corso.

Su tutti gli argomenti sono proposti parecchi esercizi, di vari gradi di difficoltà. Lo svolgimento di una buona parte di essi è essenziale per impadronirsi delle nozioni e delle tecniche usate nel corso.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Funzioni con valori in spazi di Banach

Sia X uno spazio di Banach reale o complesso, con norma $\|\cdot\|$.

Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ indichiamo con $B(I;X)$ lo spazio vettoriale (con definizione ovvia delle operazioni lineari) delle funzioni $u : I \mapsto X$ limitate. Intenderemo sempre $B(I;X)$ munito della norma del sup

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in I} \|u(t)\|.$$

Indichiamo con $C(I;X)$ (rispettivamente, $C_b(I;X)$) lo spazio vettoriale delle funzioni continue (rispettivamente, continue e limitate) da I in X. Se $X = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$ scriveremo $C(I)$ al posto di $C(I;\mathbb{R})$ o $C(I;\mathbb{C})$.

1.1.1 Derivate e integrali

La nozione di derivata si estende in modo ovvio alle funzioni $f : (a,b) \mapsto X$. f si dice derivabile nel punto $t_0 \in (a,b)$ se esiste il limite (nella topologia di X) del rapporto incrementale

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Tale limite viene chiamato derivata di f nel punto t_0 e indicato con $f'(t_0)$. Analoghe definizioni si danno per la derivata destra e sinistra.

Per ogni intero positivo k indichiamo con $C^k(I;X)$ lo spazio delle funzioni da I in X derivabili k volte, con derivate fino all'ordine k continue. Anche le definizioni di funzione di classe C^∞ e di funzione analitica sono analoghe a quelle del caso $X = \mathbb{R}$: si indica con $C^\infty(I;X)$ lo spazio delle funzioni da I in X derivabili infinite volte; inoltre una funzione $f \in C^\infty(I;X)$ viene detta analitica se per ogni $t_0 \in I$ esiste $r > 0$ tale che

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^k(t_0), \;\; t \in (t_0 - r, t_0 + r) \cap I.$$

Anche la nozione di integrale di Riemann si generalizza facilmente, ma non possiamo introdurre somme superiori e somme inferiori dato che su X non c'è una struttura di ordine in generale. Una funzione $f : [a, b] \mapsto X$ si dice integrabile in $[a, b]$ se esiste un $x \in X$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni partizione $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ di ampiezza minore di δ, e per ogni scelta dei punti $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ valga

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \varepsilon.$$

In questo caso si pone

$$\int_a^b f(t)dt = x.$$

Con la stessa dimostrazione del caso $X = \mathbb{R}$ si prova che ogni funzione continua da $[a, b]$ in X è integrabile (cfr. esercizio 7, §1.1.3).

Segue subito dalla definizione che se $f : [a, b] \mapsto X$ è integrabile in $[a, b]$ come funzione con valori in X e A è un operatore lineare e continuo da X a un altro spazio di Banach Y, allora la funzione $Af : [a, b] \mapsto Y$ è integrabile in $[a, b]$, come funzione con valori in Y, e vale

$$A \int_a^b f(t)dt = \int_a^b Af(t)dt. \tag{1.1.1}$$

Questa proprietà verrà usata spesso, e si generalizza a operatori chiusi (esercizio 12, §1.1.3).

Gli integrali impropri su semirette o su intervalli non chiusi si definiscono come nel caso $X = \mathbb{R}$.

In questo corso avremo modo di incontrare principalmente integrali di funzioni continue, che non richiedono una teoria dell'integrazione particolarmente raffinata. Per qualcosa di piú si veda l'appendice del libro [3].

Se X è uno spazio di Banach complesso e Ω è un aperto in $\mathbb{C}$, una funzione $f : \Omega \mapsto X$ si dice olomorfa in Ω se è derivabile in senso complesso in ogni punto $z_0 \in \Omega$, cioè se esiste il limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Alcune delle note proprietà degli integrali su cammini complessi di funzioni olomorfe con valori in $\mathbb{C}$ si estendono al caso di funzioni con valori in spazi di Banach complessi.

Sia $f : \Omega \mapsto X$ olomorfa, e sia $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$ una funzione continua, di classe C^1 a tratti. Poniamo

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Ovviamente, se f è olomorfa in Ω, per ogni $x' \in X'$ (X' è lo spazio duale di X, costituito da tutte le funzioni lineari e continue da X in $\mathbb{C}$) la funzione $\varphi(z) = \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω. Vale anche il viceversa, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 1.1.1. *Sia $f : \Omega \mapsto X$ continua tale che per ogni $x' \in X'$ la funzione $\varphi(z) = \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω. Allora f è olomorfa in Ω.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ e sia C la circonferenza centrata in z_0, orientata come al solito, con raggio r piccolo, in modo che la palla $B(z_0, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - z_0| \leq r\}$ sia contenuta in Ω. Per ogni $x' \in X'$, la funzione $\langle f(\cdot), x' \rangle$ è olomorfa in Ω, cosicché se $|z - z_0| \leq r/2$ si ha

$$\langle f(z), x' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z} d\xi, \quad \frac{d}{dz} \langle f(z), x' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

La seconda formula suggerisce che il candidato a $f'(z)$ è $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$.

Ricordiamo che se $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ è olomorfa, la funzione che vale $(\varphi(z) - \varphi(z_0))/(z - z_0)$ per $z \neq z_0$ e $\varphi'(z_0)$ in z_0 è olomorfa. Applicando il teorema di Cauchy si ottiene

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z_0)(\xi - z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z_0)}{(\xi - z_0)(\xi - z)} d\xi$$

e il secondo integrale è nullo per il teorema dei residui, essendo z interno al cerchio di centro z_0 e raggio r. Usiamo questo fatto per rappresentare $\langle \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, x' \rangle$. Commutiamo x' con l'integrale, usando la formula (1.1.1) con $Y = \mathbb{C}$, $A = x'$, e otteniamo

$$\begin{aligned}
&\left| \left\langle \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \ , x' \right\rangle \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z_0} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0} \right) d\xi \right| \\
= &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z - z_0}{(\xi - z)(\xi - z_0)^2} \langle f(\xi), x' \rangle d\xi \right| \leq 2r^{-2} |z - z_0| \max_{|\xi - z_0| = r} \|f(\xi)\| \, \|x'\|_{X'}.
\end{aligned}$$

Ne segue che esiste il limite del rapporto incrementale per $z \to z_0$: infatti per ogni z possiamo trovare x' di norma 1 tale che

$$\left\langle \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \ , x' \right\rangle = \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \right\|,$$

e quindi

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi,$$

che dimostra la tesi. ∎

Lo studio delle funzioni olomorfe con valori in spazi di Banach si riconduce quindi facilmente allo studio di funzioni olomorfe con valori in $\mathbb{C}$.

Usando i noti risultati per le funzioni continue o olomorfe con valori in $\mathbb{C}$ (vedere per esempio [13]) e applicando elementi del duale X', si ottengono le seguenti proprietà.

(i) Se $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$ e $\mu : [c, d] \mapsto \Omega$ sono equivalenti con lo stesso verso (cioè, esiste un diffeomorfismo di classe C^1, $\sigma : \ [a, b] \mapsto [c, d]$ tale che $\sigma'(t) > 0$ e $\gamma(t) = \mu(\sigma(t))$ per ogni $t \in [a, b]$), allora per ogni $f : \Omega \mapsto X$ continua si ha

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\mu f(z) dz.$$

(ii) (*formula di Cauchy*) Se $f : \Omega \mapsto X$ è olomorfa, allora per ogni $z_0 \in \Omega$ si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi)(\xi - z_0)^{-1} d\xi.$$

dove C è una qualunque circonferenza con centro in z_0 e raggio $r > 0$, tale che $B(z_0, r) \subset \Omega$.

(iii) Se $f : \Omega \to X$ è olomorfa, per ogni curva chiusa di classe C^1 a tratti γ con immagine contenuta in Ω e tale che l'indice di γ rispetto a ogni $z \notin \Omega$ sia 0 si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Si dimostra inoltre, ragionando come nel caso $X = \mathbb{C}$, che f è olomorfa in Ω se e soltanto se è analitica in Ω.

1.1.2 Operatori lineari

Indichiamo con $\mathcal{L}(X)$ l'algebra degli operatori $T : X \mapsto X$ lineari e continui in X. Ricordiamo che un operatore lineare T è continuo se e solo se risulta

$$\|T\| := \sup_{x \in X:\, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$$

Si vede subito che $T \mapsto \|T\|$ è una norma e $\mathcal{L}(X)$ munito della norma suddetta è uno spazio di Banach.

Sia $D(L)$ un sottospazio vettoriale di X e sia $L : D(L) \mapsto X$ un operatore lineare. Si dice che L è *chiuso* se il suo grafico

$$\mathcal{G}_L = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(L),\ y = Lx\}$$

è chiuso in $X \times X$. L è chiuso se e solo se vale l'implicazione

$$\{x_n\} \subset D(L),\ \ x_n \to x,\ \ Lx_n \to y \Longrightarrow x \in D(L),\ y = Lx.$$

Si dice che L è *prechiuso* o *chiudibile* se esiste un operatore $\overline{L}$, ovviamente unico, avente per grafico la chiusura di $\mathcal{G}_L$. Si verifica facilmente che L è prechiuso se e solo se vale l'implicazione

$$\{x_n\} \subset D(L),\ \ x_n \to 0,\ \ Lx_n \to y \Longrightarrow y = 0. \tag{1.1.2}$$

Infatti in questo caso definiamo $\overline{L}$ ponendo

$$D(\overline{L}) = \{x \in X :\ \exists x_n\} \subset D(L),\ \ x_n \to x,\ \ Lx_n \text{ convergein } Y\}.$$

Per la (1.1.2), se $x \in D(\overline{L})$ e due successioni x_n, $\tilde{x}_n$ convergono a x e $Lx_n \to y_1$, $L\tilde{x}_n \to y_2$, allora $y_1 = y_2$. Possiamo quindi definire

$$\overline{L}x = \lim_{n \to \infty} Lx_n,$$

dove x_n è una qualunque successione di elementi di $D(L)$ tale che Lx_n converge. Per costruzione, $\overline{L}$ è chiuso, ed è la piú piccola estensione chiusa di L (ovvero, quella col dominio piú piccolo).

Valgono le ovvie implicazioni: T continuo $\Longrightarrow T$ chiuso $\Longrightarrow T$ prechiuso, ma nessuna delle implicazioni opposte.

Se $L : D(L) \subset X \to X$ è chiuso muniamo $D(L)$ della *norma del grafico*

$$\|x\|_{D(L)} = \|x\| + \|Lx\|.$$

Con tale norma $D(L)$ è uno spazio di Banach, e $L : D(L) \mapsto X$ è continuo.

Tipici esempi di operatori chiusi sono gli operatori differenziali definiti nel loro dominio naturale (cioè il dominio massimale) a seconda dello spazio X in cui ci si ambienta.

Esempio 1.1.2. Sia $X = C([0,1])$, dotato della usuale norma del sup, e sia

$$D(A) = C^1([0,1]); \quad Au = u', \; \forall u \in D(A). \tag{1.1.3}$$

Se $C^1([0,1])$ è dotato della topologia di X, A non è continuo. Posto per esempio

$$u_n(\xi) = \xi^n, \; n \in \mathbb{N}$$

si ha

$$\|u_n\| = 1, \; \|u_n'\| = n.$$

Tuttavia A è chiuso grazie al noto teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. La norma "naturale" di $C^1([0,1])$, data da $\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$, è la norma del grafico di A, e rende $C^1([0,1])$ uno spazio di Banach. Se $C^1([0,1])$ è dotato di tale norma, $A : C^1([0,1]) \mapsto C([0,1])$ è continuo.

Esempio 1.1.3. Sia ora $X = L^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p < \infty$, e sia

$$D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}); \quad Au = u', \; \forall u \in D(A).$$

Qui la derivata è intesa ovviamente in senso debole. Ricordiamo che una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$ è derivabile in senso debole, con derivata g, se per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx$, e che $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è il sottospazio di $L^p(\mathbb{R})$ costituito da tutte le $f \in L^p(\mathbb{R})$ dotate di derivata debole in $L^p(\mathbb{R})$.

Se $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è dotato della topologia di X, A non è continuo. Per esempio, se prendiamo

$$u_n(\xi) = \frac{np}{2}\, e^{-n|\xi|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

si ha

$$\|u_n\| = 1, \; \|u_n'\| = n.$$

Tuttavia A è chiuso: se u_n è una successione di funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R})$ tali che u_n converge a u e u_n' converge a g in $L^p(\mathbb{R})$, allora per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha, usando la disuguaglianza di Hölder

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_n(x) - u(x))\varphi'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_n'(x) - g(x))\varphi(x)dx = 0,$$

per cui

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi'(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} u_n'(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx$$

ossia u è derivabile in senso debole, con derivata g, e quindi $u \in D(A)$, $Au = g$.

Come nell'esempio 1.1.2, la norma "naturale" di $W^{1,p}(\mathbb{R})$, data da $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$, è la norma del grafico di A, e rende $W^{1,p}(\mathbb{R})$ uno spazio di Banach. Se $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è dotato di tale norma, $A : W^{1,p}(\mathbb{R}) \mapsto L^p(\mathbb{R})$ è continuo.

Tipici esempi di operatori chiudibili sono gli operatori differenziali definiti su domini piú piccoli dei loro domini naturali:

Esempio 1.1.4. Sia ancora $X = C([0,1])$, e sia

$$D(A) = C^2([0,1]) \;\; Au = u', \; \forall u \in D(A). \tag{1.1.4}$$

A non è chiuso: il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili garantisce che la funzione limite è derivabile, ma non necessariamente derivabile due volte (cfr. esercizi). Comunque A è prechiuso, grazie sempre allo stesso teorema.

Un esempio di operatore non chiudibile in $X = L^2(0,1)$ è dato da $D(A) = C([0,1])$, $Af(\xi) = f(0)$ per ogni $\xi \in (0,1)$. La successione $f_n(\xi) = \xi^n$ tende a 0 in X ma Af_n è uguale alla funzione che vale identicamente 1, per ogni n. Un esempio di operatore non chiudibile in $X = C([0,1])$ è l'operatore A, con dominio l'insieme dei polinomi, definito da $Af(\xi) = f(\xi+1)$ per $0 \le \xi \le 1$. Basta prendere una successione di polinomi che converga uniformemente in $[0,2]$ a una funzione che vale 0 in $[0,1]$, con valori diversi da 0 in $[1,2]$, e si contraddice la (1.1.2).

I seguenti lemmi, di facile dimostrazione, saranno usati spesso.

Lemma 1.1.5. *Siano X, Y due spazi di Banach, sia D un sottospazio di X, e sia $\{A_n\}_{n\ge 0}$ una successione di operatori lineari e continui da X a Y tali che*

$$\|A_n\| \le M, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = A_0 x \;\; \forall x \in D,$$

Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = A_0 x \;\; \forall x \in \overline{D},$$

essendo $\overline{D}$ la chiusura di D in X.

Dimostrazione. Dati $x \in \overline{D}$ e $\varepsilon > 0$, sia $u \in D$ tale che $\|x - u\|_X \le \varepsilon$, e sia n_0 tale che per ogni $n \ge n_0$ si abbia $\|A_n u - A_0 u\|_Y \le \varepsilon$. Per ogni $n \ge n_0$ vale dunque

$$\|A_n x - A_0 x\|_Y \le \|A_n(x-u)\|_Y + \|A_n u - A_0 u\|_Y + \|A_0(u-x)\|_Y \le M\varepsilon + \varepsilon + \|A_0\|\varepsilon$$

e la tesi segue. ∎

Lemma 1.1.6. *Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore chiuso, e sia $f : [a,b] \mapsto D(A)$ tale che le funzioni $t \mapsto f(t)$, $t \mapsto Af(t)$ siano integrabili su $[a,b]$. Allora*

$$\int_a^b f(t)dt \in D(A), \quad A\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Af(t)dt.$$

In particolare, gli operatori lineari continui commutano con gli integrali (di funzioni integrabili, ovviamente).

1.1.3 Esercizi

1) Date $f : [a,b] \mapsto X$ e una successione di funzioni $f_n : [a,b] \mapsto X$ si dice che f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$ se $\lim_{n\to\infty} \sup_{a\le t\le b} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$.

(a) Dimostrare che vale il teorema di scambio dei limiti per la convergenza uniforme, cioè: se f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$ e $t_0 \in [a,b]$ è tale che per ogni n esiste il limite $\lim_{t\mapsto t_0} f_n(t) = l_n$, allora la successione l_n ha limite l e inoltre esiste il $\lim_{t\to t_0} f(t)$ e coincide con l, per cui possiamo scrivere

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to t_0} f_n(t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

(b) Dimostrare che se una successione di funzioni $f_n : [a,b] \mapsto X$ di classe C^1 è tale che f_n converge uniformemente a una funzione f e f_n' converge uniformemente a una funzione g, allora f è derivabile e $f' = g$. (Usare il risultato dell'esercizio 9).

(c) Utilizzando i punti (a) e (b), provare che $C([a,b];X)$, dotato della norma del sup, e $C^k([a,b];X)$ (con $k \in \mathbb{N}$), dotato della norma

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \|f^{(k)}\|_\infty$$

sono spazi di Banach.

2) (a) Provare che se $f : [a,b] \mapsto X$ è derivabile allora è continua. (b) Provare che se $f : [a,b] \mapsto X$ è derivabile con f' limitata in $[a,b]$, allora f è lipschitziana. Suggerimento: nel caso in cui f' è continua si tratta di una facile conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale e della maggiorazione dell'esercizio 8. Nel caso generale, sfruttare il fatto che la tesi è vera se $X = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$, e ricondursi a questo caso considerando tutte le funzioni del tipo $x'f$, con $x' \in X'$ arbitrario.

3) Data $u : [a,b]\times[0,1] \mapsto \mathbb{R}$ poniamo $U(t)(x) = u(t,x)$. Provare che $U \in C([a,b];C([0,1]))$ se e solo se u è continua, e che $U \in C^1([a,b];C([0,1]))$ se e solo se u è continua, è derivabile rispetto a t e u_t è continua.

4) Sia $u : [a,b] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata, e poniamo $U(t)(x) = u(t,x)$. È vero che $U \in C([a,b];C_b(\mathbb{R})$ (lo spazio $C_b(\mathbb{R})$ è dotato ovviamente della norma del sup)?

5) Sia $\alpha \in (0,1)$. Lo spazio delle funzioni α-Hölderiane su $[a,b]$ è definito da

$$C^\alpha([a,b]) = \left\{ f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}:\ [f]_\alpha \equiv \sup_{a\le x<y\le b} \frac{|f(x)-f(y)|}{(y-x)^\alpha} < \infty \right\},$$

ed è dotato della norma

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha.$$

(a) Provare che è uno spazio di Banach. (b) Data $u:[0,T]\times[a,b]\mapsto\mathbb{R}$, dare condizioni necessarie e sufficienti affinché la funzione $U(t)(x)=u(t,x)$ appartenga a $C([0,T];C([a,b]))$ $\cap\ B([0,T];C^\alpha([a,b])$ e affinché appartenga a $C([0,T];C^\alpha([a,b]))$. La funzione $U(t)(x) = (x+t)^\alpha$, $0\le t,\ x\le 1$ a quale dei due spazi appartiene?

6) Sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di X, tali che la serie $\sum_{k=0}^\infty \|x_k\|$ è convergente. Si dice allora che la serie è normalmente convergente. Provare che la serie $\sum_{k=0}^\infty x_k$ è convergente (cioè che esiste il limite della successione delle somme parziali).

7) Provare che se $f:[a,b]\mapsto X$ è continua allora è integrabile. Una dimostrazione dettagliata nel caso $X=\mathbb{R}$ è sul libro di Bramanti, Pagani, Salsa "Analisi Matematica 1" (Zanichelli 2008), c'è da verificare che la stessa dimostrazione funziona quando X è uno spazio di Banach qualunque.

8) Provare che se $f:[a,b]\mapsto X$ è continua allora $t\mapsto\|f(t)\|$ è integrabile e si ha

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

9) Dimostrare l'analogo del Teorema fondamentale del calcolo integrale, ovvero: se f : $[a,b]\mapsto X$ è integrabile, ed è continua nel punto t_0, allora

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} f(t)dt = f(t_0).$$

(Se $t_0=a$ oppure $t_0=b$ si tratta di un limite destro o sinistro, rispettivamente).

.

10) Provare che se $f:(a,b]\mapsto X$ è continua e $\|f(t)\|\le g(t)$ per ogni $t\in(a,b)$, essendo $g\in L^1(a,b)$, allora f è integrabile in senso improprio su $[a,b]$.

11) Trovare una successione di funzioni $f_n\in C^2([0,1])$ tali che le successioni f_n e f_n' convergono in $C([0,1])$ (cioè convergono uniformemente) ma la funzione limite f non è di classe C^2.

12) Dimostrare il lemma 1.1.6.

13) Siano I_1, I_2 intervalli (non necessariamente limitati) in $\mathbb{R}$, e sia $g: I_1\times I_2\mapsto X$ continua, tale che per ogni $(\lambda,t)\in I_1\times I_2$ si abbia $\|g(\lambda,t)\|\le\varphi(t)$ con $\varphi\in L^1(I_2)$. Dimostrare che la funzione

$$G(\lambda) = \int_{I_2} g(\lambda,t)dt,\ \ \lambda\in I_1$$

è continua in I_1. Dimostrare che se g è derivabile rispetto a λ con g_λ continua e $\|g_\lambda(\lambda,t)\| \le \psi(t)$ con $\psi \in L^1(I_2)$ allora G è derivabile in I_1 e

$$G'(\lambda) = \int_{I_2} g_\lambda(\lambda,t)dt, \quad \lambda \in I_1.$$

14) Dimostrare un analogo della formula di Taylor con resto integrale: se $f : [a,b] \mapsto X$ è di classe C^2, allora

$$f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + \int_a^t (t-s)f''(s)ds, \quad a \le t \le b.$$

1.2 Problemi lineari nel caso in cui A è limitato

Sia $A : X \mapsto X$ lineare e continuo. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \ t \ge 0, \\ \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

dove $x \in X$. Per *soluzione* del problema (1.2.1) intendiamo una funzione $u : [0,+\infty) \mapsto X$ derivabile con continuità, che verifica (1.2.1).

Si verifica facilmente (cfr. esercizio 9, §1.1.3) che risolvere il problema (1.2.1) è equivalente a trovare una funzione $u : [0,\infty) \mapsto X$ continua, soluzione dell'equazione integrale

$$u(t) = x + \int_0^t Au(s)ds, \quad t \ge 0. \tag{1.2.2}$$

Proposizione 1.2.1. *L'equazione* (1.2.2) *(e quindi il problema* (1.2.1)*) ha una soluzione unica, data dalla restrizione a* $[0,\infty)$ *della funzione*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ *essendo convergente in* $\mathcal{L}(X)$ *uniformemente in* t *sui limitati di* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Esistenza. Fissiamo un intervallo $[0,T]$ e risolviamo la (1.2.2) in $[0,T]$ con il metodo delle approssimazioni successive, ponendo

$$x_0(t) = x, \ x_{n+1}(t) = x + \int_0^t Ax_n(s)ds, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.3}$$

Si ha

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} x.$$

Essendo

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k \|A\|^k}{k!}$$

segue che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ è normalmente convergente in $\mathcal{L}(X)$ uniformemente per t in $[0, T]$, e inoltre che la successione $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[0, T]$ a $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} x$. Passando al limite in (1.2.3) si vede poi che x è soluzione di (1.2.2).

Unicità. Siano x, y due soluzioni di (1.2.2) in $[0, T]$. Si ha (cfr. esercizio 8, §1.1.3.)

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|A\| \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds$$

Dal Lemma di Gronwall segue allora che $x = y$. ■

Poniamo

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2.4}$$

Esempio 1.2.2. Sia $X = C([0, 1])$ e sia A l'operatore lineare definito da

$$(Ax)(\xi) = \int_0^{\xi} K(\xi, \eta) x(\eta) d\eta, \ \forall \, x \in C([0, 1]).$$

dove $K : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ è continua. Si verifica facilmente che A è continuo. Allora esiste $u \in C^1([0, T]; C([0, 1])$ che risolve il problema (1.2.1). Dato che, per ogni $t \in [0, 1]$, $u(t) \in C([0, 1])$ possiamo porre

$$f(t, \xi) = (u(t))(\xi), \ \forall \, t \in [0, T], \forall \, \xi \in [0, 1].$$

Si può allora provare facilmente che

(i) $f : [0, T] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ è continua;

(ii) f è derivabile parzialmente rispetto a t in $[0, T]$;

(iii) f è soluzione del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f(t, \xi) = \displaystyle\int_0^{\xi} K(\xi, y) f(t, y) dy, \\ \\ f(0, \xi) = x(\xi). \end{cases}$$

Consideriamo ora il problema nonomogeneo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & 0 \le t \le T, \\ \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.2.5}$$

dove $A \in \mathcal{L}(X)$, $x \in X$, $f \in C([0,T];X)$ e $T > 0$.

Per soluzione del problema (1.2.5) in $[0,T]$ si intende una funzione $u : [0,T] \mapsto X$ di classe C^1 che verifica le uguaglianze in (1.2.5).

Proposizione 1.2.3. *Il problema* (1.2.5) *ha una e una sola soluzione in* $[0,T]$ *data da*

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds. \tag{1.2.6}$$

Dimostrazione. Si verifica direttamente che u è soluzione. Proviamo l'unicità. Se u_1, u_2 sono soluzioni, la loro differenza v soddisfa $v'(t) = Av(t)$ per $0 \le t \le T$, $v(0) = 0$. Per quanto dimostrato nella proposizione precedente, $v \equiv 0$. ■

1.2.1 Esercizi

1) Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Provare che

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA};\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}.$$

2) Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Provare che l'applicazione

$$\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X),\ \ t \to e^{tA}$$

è differenziabile, e risulta

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA},\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

In particolare,

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{tA} - I}{t} = A \ \text{ in } \ \mathcal{L}(X).$$

3) Provare che se $A = \alpha I$ con α scalare allora $e^{tA} = e^{\alpha t}I$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Provare che se $A \in \mathcal{L}(X)$ allora $e^{t(A+\alpha I)} = e^{\alpha t}e^{tA}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

4) Calcolare e^{tA} nel caso in cui $X = \mathbb{R}^3$, A è l'applicazione lineare associata alla matrice

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ (c) \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(si può usare a seconda dei casi la definizione oppure la Proposizione 1.2.1 risolvendo l'equazione differenziale associata).

5) Calcolare la soluzione di (1.2.5) essendo $X = \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

6) Sia $A : C([-1,1]) \mapsto C([-1,1])$ definito da $Af(x) = (f(x) - f(-x))/2)$. Calcolare e^{tA}. Più in generale, calcolare e^{tA} quando $A \in \mathcal{L}(X)$ è un proiettore, cioè $A^2 = A$.

7) Siano $A \in \mathcal{L}(X)$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Dimostrare che per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $f : I \mapsto X$ continua, $x \in X$, il problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in I \\ \\ u(t_0) = x, \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C^1(I; X)$, data dalla formula

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}x + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds, \quad t \in I.$$

Capitolo 2

Spettro e risolvente

2.1 Definizioni e proprietà elementari

Supponiamo che $X \neq \{0\}$ sia uno spazio di Banach reale o complesso. Anche nel caso in cui X è reale, dovremo parlare di spettro e risolvente complessi: introduciamo la complessificazione di X, definita da

$$\tilde{X} = \{x + iy : \ x, \ y \in X\}; \ \ \|x + iy\|_{\tilde{X}} = \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \|x \cos\theta + y \sin\theta\|.$$

(Attenzione: la “norma” euclidea $\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ non è una norma, in generale, perchè non soddisfa la condizione $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \tilde{X}$). Se $A : D(A) \subset X \mapsto X$ è un operatore lineare, la complessificazione di A è definita da

$$D(\tilde{A}) = \{x + iy : \ x, \ y \in D(A)\}, \ \ \tilde{A}(x + iy) = Ax + iAy.$$

Nel seguito, se non ci sarà pericolo di fare confusione, toglieremo tutte le tilde, e per spettro e risolvente di A intenderemo lo spettro e il risolvente di $\tilde{A}$.

Definizione 2.1.1. *Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore lineare. L'* insieme risolvente *$\rho(A)$ e lo* spettro *$\sigma(A)$ di A sono definiti da*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \, (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}, \ \ \sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A). \tag{2.1.1}$$

I numeri complessi $\lambda \in \sigma(A)$ tali che $\lambda I - A$ non è iniettiva sono detti autovalori*, e gli elementi $x \in D(A)$ tali che $Ax = \lambda x$ sono detti* autovettori *(o* autofunzioni*, quando X è uno spazio funzionale). L'insieme $\sigma_p(A)$ che consiste di tutti gli autovalori di A è detto* spettro puntuale.

Se $\lambda \in \rho(A)$, poniamo

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A). \tag{2.1.2}$$

$R(\lambda, A)$ è detto *operatore risolvente* o semplicemente *risolvente*.

Osserviamo che se X ha dimensione finita allora ogni funzione lineare è continua anzi di classe C^∞, quindi la condizione $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ è superflua nella definizione di $\rho(A)$.

Si verifica facilmente (cfr. esercizio 1, §2.1.1) che se $\rho(A)$ è non vuoto allora A è chiuso.

Esempio 2.1.2. Sia $X = C([0,1])$. Consideriamo gli operatori lineari A, B, C in X definiti da

$$D(A) = C^1([0,1]), \;\; Au = u',$$

$$D(B) = \{u \in C^1([0,1]);\; u(0) = 0\},\; Bu = u',$$

$$D(C) = \{u \in C^1([0,1]);\; u(0) = u(1)\},\; Cu = u'.$$

Risulta

$$\rho(A) = \emptyset, \;\; \sigma(A) = \mathbb{C}.$$

Infatti, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - A$ non è iniettiva dato che, per ogni $c \in \mathbb{C}$ la funzione $u(\xi) = ce^{\lambda\xi}$ appartiene a $D(A)$ e si ha $(\lambda I - A)u = 0$.

Per quanto riguarda l'operatore B si ha

$$\rho(B) = \mathbb{C}, \;\; \sigma(B) = \emptyset, \;\; (R(\lambda, B)f)(\xi) = -\int_0^{\xi} e^{\lambda(\xi-\eta)} f(\eta)d\eta, \;\; 0 \leq \xi \leq 1. \tag{2.1.3}$$

Infatti basta osservare che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni $f \in X$ il problema

$$\begin{cases} \lambda u(\xi) - u'(\xi) = f(\xi), \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione data da (2.1.3).

Infine si ha

$$\rho(C) = \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : \; k \in \mathbb{Z}\}, \;\; \sigma(C) = \{2k\pi i : \; k \in \mathbb{Z}\}$$

essendo $2k\pi i$ autovalore con autofunzioni $\xi \mapsto ce^{2k\pi i \xi}$, e per $\lambda \neq 2k\pi i$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$(R(\lambda, C)f)(\xi) = \frac{e^{\lambda\xi}}{e^{\lambda} - 1} \int_0^1 e^{\lambda(1-\eta)} f(\eta)d\eta - \int_0^{\xi} e^{\lambda(\xi-\eta)} f(\eta)d\eta. \tag{2.1.4}$$

Vediamo ora alcune semplici proprietà dello spettro e del risolvente.

Innanzitutto è chiaro che se $A : D(A) \subset X \mapsto X$ e $B : D(B) \subset X \mapsto X$ sono operatori lineari tali che $R(\lambda_0, A) = R(\lambda_0, B)$ per qualche $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, allora $D(A) = D(B)$ e $A = B$. Infatti, $D(A) = \text{Range } R(\lambda_0, A) = \text{Range } R(\lambda_0, B) = D(B)$, e per ogni $x \in D(A) = D(B)$, posto $y = \lambda_0 x - Ax$, si ha $x = R(\lambda_0, A)y = R(\lambda_0, B)y$ e applicando $\lambda_0 I - B$ si ottiene $\lambda_0 x - Bx = y$ cosicché $\lambda_0 x - Ax = \lambda_0 x - Bx$, che implica $Ax = Bx$.

La seguente formula è detta *"identità del risolvente*, o anche *"prima identità del risolvente*, la sua verifica è facile ed è lasciata per esercizio:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A), \;\; \forall \; \lambda, \; \mu \in \rho(A). \tag{2.1.5}$$

L'identità del risolvente caratterizza gli operatori risolventi, nel senso specificato dalla seguente proposizione.

Proposizione 2.1.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, e sia $\{F(\lambda) : \lambda \in \Omega\} \subset \mathcal{L}(X)$ una famiglia di operatori lineari che soddisfano l'identità del risolvente*

$$F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu), \ \ \forall \lambda, \ \mu \in \Omega.$$

Supponiamo inoltre che per qualche $\lambda_0 \in \Omega$, l'operatore $F(\lambda_0)$ sia iniettivo. Allora esiste un operatore lineare $A : D(A) \subset X \mapsto X$ tale che $\rho(A) \supset \Omega$, e $R(\lambda, A) = F(\lambda)$ per $\lambda \in \Omega$.

Dimostrazione. Fissiamo $\lambda_0 \in \Omega$, e poniamo

$$D(A) = \text{Range } F(\lambda_0), \ \ Ax = \lambda_0 x - F(\lambda_0)^{-1}x \ \ \forall x \in D(A).$$

Per $\lambda \in \Omega$ e $y \in X$ l'equazione del risolvente $\lambda x - Ax = y$ è equivalente a $(\lambda - \lambda_0)x + F(\lambda_0)^{-1}x = y$. Applicando $F(\lambda)$ si ottiene $(\lambda - \lambda_0)F(\lambda)x + F(\lambda)F(\lambda_0)^{-1}x = F(\lambda)y$. Usando l'identità del risolvente si vede facilmente che

$$F(\lambda)F(\lambda_0)^{-1} = F(\lambda_0)^{-1}F(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)F(\lambda) + I.$$

Quindi se x è soluzione allora $x = F(\lambda)y$. Per verifica diretta si vede che effettivamente $x = F(\lambda)y$ è una soluzione dell'equazione del risolvente. Infatti $\lambda F(\lambda)y - AF(\lambda)y = \lambda F(\lambda)y - \lambda_0 F(\lambda)y + F(\lambda_0)^{-1}F(\lambda) = y$. Di conseguenza $\lambda \in \rho(A)$, e $R(\lambda, A) = F(\lambda)$. ■

L'insieme risolvente di A è aperto, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 2.1.4. *Siano $\lambda_0 \in \rho(A)$, $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$. Allora $\lambda \in \rho(A)$ e risulta*

$$R(\lambda, A) = R(\lambda_0, A)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A))^{-1} \tag{2.1.6}$$

Quindi $\rho(A)$ è aperto e $\sigma(A)$ è chiuso.

Dimostrazione. L'equazione $\lambda x - Ax = y$ equivale a

$$(\lambda - \lambda_0)x + (\lambda_0 - A)x = y$$

e, posto $z = (\lambda_0 - A)x$, a

$$z + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)z = y$$

Dato che $\|(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)\| < 1$, l'operatore $I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)$ è invertibile con inverso continuo (cfr. esercizio 2, §2.1.1), e l'equazione per la z ha un'unica soluzione data da

$$z = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A))^{-1}y,$$

da cui la tesi. ■

Alcune proprietà del risolvente sono elencate nella proposizione seguente.

Proposizione 2.1.5. *Valgono le affermazioni seguenti.*

(i) $R(\cdot, A)$ *è continua in* $\rho(A)$.

(ii) $R(\cdot, A)$ *è olomorfa in* $\rho(A)$ *e risulta*

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)_{|\lambda=\lambda_0} = -R^2(\lambda_0, A)$$

(iii) Per $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$ *si ha*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R^{n+1}(\lambda_0, A) \tag{2.1.7}$$

$$\left.\frac{d^n R(\lambda, A)}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=\lambda_0} = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda_0, A) \tag{2.1.8}$$

Dimostrazione. Se $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$ da (2.1.6) segue che

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\lambda_0, A) &= R(\lambda_0, A)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A))^{-1} - R(\lambda_0, A) \\ &= -(\lambda - \lambda_0)R^2(\lambda_0, A)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A))^{-1} \end{aligned}$$

da cui

$$\|R(\lambda, A) - R(\lambda_0, A)\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0| \, \|R(\lambda_0, A)\|^2}{1 - |\lambda - \lambda_0| \, \|R(\lambda_0, A)\|}$$

e quindi $R(\cdot, A)$ è continuo.

(ii) Dall'identità del risolvente segue

$$\frac{R(\lambda, A) - R(\lambda_0, A)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda, A)R(\lambda_0, A)$$

da cui la tesi per $\lambda \to \lambda_0$.

(iii) La (2.1.7) segue da (2.1.6) (cfr. esercizio 2, §2.1.1), e la (2.1.8) segue a sua volta dalla (2.1.7). ■

Come conseguenza della proposizione 2.1.4, si può vedere che l'insieme risolvente è il piú grande dominio di analiticità della funzione $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$.

Corollario 2.1.6. *Siano* Ω_1 *un aperto contenuto in* $\rho(A)$, *e sia* Ω_2 *un aperto connesso contenente* Ω_1, *tale che la funzione* $R(\cdot, A)$ *ha una estensione olomorfa* $F(\lambda)$ *a* Ω_2. *Allora* $\Omega_2 \subset \rho(A)$ *e* $F(\lambda) = R(\lambda, A)$ *per ogni* $\lambda \in \Omega_2$.

Dimostrazione. La funzione $\Omega_2 \times \Omega_2 \mapsto \mathcal{L}(X)$, $(\lambda, \mu) \mapsto F(\lambda) - F(\mu) - (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu)$ è olomorfa in $\Omega_2 \times \Omega_2$ e identicamente nulla in $\Omega_1 \times \Omega_1$, per l'identità del risolvente. Quindi si annulla in tutto $\Omega_2 \times \Omega_2$. Dato che, fissato un qualunque $\lambda_0 \in \Omega_1$, $F(\lambda_0)$ è iniettivo, dalla Proposizione 2.1.3 segue che esiste un operatore lineare T tale che $F(\lambda) = R(\lambda, T)$ per ogni $\lambda \in \Omega_2$. Essendo $F(\lambda_0) = R(\lambda_0, A)$, si ha $R(\lambda_0, T) = R(\lambda_0, A)$ e quindi $T = A$. ■

Corollario 2.1.7. *Sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tale che esiste un intorno U di λ_0 tale che $U \setminus \{\lambda_0\} \subset \rho(A)$ e $\|R(\cdot, A)\|$ è limitata in $U \setminus \{\lambda_0\}$. Allora $\lambda_0 \in \rho(A)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Dalla proposizione 2.1.4 otteniamo, per ogni $\lambda \in \rho(A)$, che se $|z - \lambda| < 1/\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ allora $z \in \rho(A)$, quindi $\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A)) \geq 1/\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$, da cui

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A))}.$$

Se λ è sufficientemente vicino a λ_0, la distanza di λ da $\sigma(A)$ è uguale a $|\lambda - \lambda_0|$. Facendo tendere λ a λ_0 otteniamo che $\lambda \mapsto \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ è illimitata, assurdo. ∎

Le proposizioni seguenti riguardano alcune delle proprietà spettrali degli operatori limitati. Se $T \in \mathcal{L}(X)$, consideriamo la serie di potenze in $\mathcal{L}(X)$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k z^k, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.1.9}$$

Proposizione 2.1.8. *La serie in* (2.1.9) *è normalmente convergente all'interno del cerchio $C(0, 1/r(T))$ di centro* 0 *e raggio $1/r(T)$, dove*

$$r(T) = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Inoltre se $|z| < 1/r(T)$ risulta

$$F(z) = (I - zT)^{-1} \tag{2.1.10}$$

e se $|z| < 1/\|T\|$ si ha

$$\|(I - zT)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - |z|\,\|T\|} \tag{2.1.11}$$

La (2.1.9) *è detta anche* serie di Neumann *di $(I - zT)^{-1}$.*

Dimostrazione. La convergenza della serie (2.1.9) nel cerchio $C(0, r(T))$ segue facilmente applicando il criterio della radice alla serie di numeri reali $\sum_{k=1}^{\infty} \|T^k\|\,|z|^k$. La (2.1.10) si prova verificando che, se $|z| < 1/r(T)$, risulta

$$(I - zT)F(z) = F(z)(I - zT) = I$$

(Nel caso in cui $|z| < 1/\|T\|$ la (2.1.10) si può anche vedere come conseguenza dell'esercizio 2, §2.1.1). Infine la (2.1.11) segue dalla disuguaglianza

$$\|F(z)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \|T\|^k = \frac{1}{1 - |z|\,\|T\|}.$$

∎

Proposizione 2.1.9. *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora valgono le proprietà seguenti.*

(i) *$\sigma(T)$ è contenuto nel cerchio $C(0, r(T))$ di centro 0 e raggio $r(T)$. Se $|\lambda| > r(T)$ allora $\lambda \in \rho(T)$, e risulta*

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \lambda^{-k-1}. \tag{2.1.12}$$

Per questo motivo $r(T)$ è detto il raggio spettrale *di T. Inoltre se $|\lambda| > \|T\|$ risulta*

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \tag{2.1.13}$$

(ii) *$\sigma(T)$ è non vuoto.*

Dimostrazione. L'affermazione (i) segue dalla proposizione 2.1.8, osservando che per $\lambda \neq 0$ l'equazione $\lambda x - Tx = y$ è equivalente, posto $z = 1/\lambda$, a $x - zTx = zy$.

Proviamo (ii). Supponiamo per assurdo che $\sigma(T) = \emptyset$; allora $R(\cdot, T)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$. Ne segue che, per ogni $x \in X$, $x' \in X'$ la funzione $\langle R(\cdot, T)x, x' \rangle$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ (si è indicato con X' lo spazio duale di X), e limitata grazie alla (2.1.13), dato che $\|R(\lambda, \cdot)\|$ è continua su tutto $\mathbb{C}$, e per la la (2.1.13) è limitata fuori da un fissato cerchio di centro 0 e raggio $r > \|T\|$. Dal teorema di Liouville segue che $\langle R(\cdot, T)x, x' \rangle$ è costante. In particolare, prendendo $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ si ottiene $\langle (-T^{-1} - (I - T)^{-1})x, x' \rangle = 0$ per ogni $x \in X$, $x' \in X'$; quindi $T^{-1} = -(I - T)^{-1}$ ossia $T = -I + T$, il che è assurdo. ■

2.1.1 Esercizi

1) Provare che se un operatore lineare $A : D(A) \subset X \mapsto X$ ha insieme risolvente non vuoto, allora è chiuso. (Può convenire considerare prima il caso in cui $0 \in \rho(A)$ e poi ricondursi a questo caso osservando che A è chiuso se e solo se $A - \lambda I$ è chiuso per qualche λ).

2) Provare che se un operatore $A \in \mathcal{L}(X)$ ha norma minore di 1 allora $I - A$ è invertibile con inverso dato dalla serie geometrica

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

(usato nella dim. della Proposizione 2.1.4).

3) Provare che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha $\sigma(\alpha A) = \alpha\sigma(A)$, $\sigma(\alpha I - A) = \alpha - \sigma(A)$. Provare che se $0 \in \rho(A)$ allora $\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = 1/\sigma(A)$.

Provare che $\rho(A + \alpha I) = \rho(A) + \alpha$, $R(\lambda, A + \alpha I) = R(\lambda - \alpha, A)$ per ogni $\lambda \in \rho(A) + \alpha$.

4) Sia $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ una funzione continua, e sia $A : C([a, b]; \mathbb{C}) \mapsto C([a, b]; \mathbb{C})$ l'operatore definito da $(Af)(x) = f(x)\varphi(x)$ (A è detto operatore di moltiplicazione). Trovare lo spettro di A. Come deve essere φ perché A abbia autovalori?

Rispondere alle stesse domande con $C([a, b]; \mathbb{C})$ sostituito da $L^p((a, b); \mathbb{C})$, $p \geq 1$.

5) Sia $C_b(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$, dotato della norma del sup, e sia A l'operatore definito da

$$D(A) = C_b^1(\mathbb{R}) = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : \exists f' \in C_b(\mathbb{R})\} \mapsto C_b(\mathbb{R}), \quad Af = f'.$$

Trovare lo spettro di A e dare una espressione esplicita di $R(\lambda, A)$ per $\lambda \in \rho(A)$. Quali sono gli autovalori di A?

6) Nelle ipotesi dell'esercizio 5, dire chi è A^2, trovarne lo spettro, gli autovalori, e dare una espressione esplicita di $R(\lambda, A^2)$ per $\lambda \in \rho(A^2)$.

7) Sia $P \in \mathcal{L}(X)$ un proiettore, cioè $P^2 = P$. Trovare lo spettro di P, dire quali sono gli autovalori e dare una espressione esplicita di $R(\lambda, P)$ per $\lambda \in \rho(P)$.

8) Siano $X = C([0,\pi])$, $D(A_1) = \{f \in C^2([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$, $A_1 f = f''$, $D(A_2) = \{f \in C^2([0,\pi]) : f'(0) = f'(\pi) = 0\}$, $A_2 f = f''$. Trovare gli spettri di A_1 e di A_2 e dare una espressione esplicita di $R(\lambda, A_1)$ e di $R(\lambda, A_2)$ per $\lambda \in \rho(A_1)$, $\lambda \in \rho(A_2)$ rispettivamente.

9) Siano $X_1 = C_b((-\infty, 0])$, $D(A_1) = \{f \in C_b^2((-\infty, 0]) : f'(0) - f(0) = 0\}$, $A_1 f = f'' - f'$, e $X_2 = \{f \in C((-\infty, 0]) : e^{-x/2} f(x) \in L^\infty(-\infty, 0)\}$, $D(A_2) = \{f \in C^2((-\infty, 0]) : f, f', f'' \in X_2,\ f'(0) - f(0) = 0\}$, $A_2 f = f'' - f'$. X_2 è dotato della sua norma naturale $\|f\| = \sup_{x \leq 0} |e^{-x/2} f(x)|$. Trovare $\sigma(A_1)$, $\sigma(A_2)$ e confrontarli.

2.2 Punti isolati dello spettro

Studiamo il comportamento di $R(\lambda, A)$ vicino a punti isolati dello spettro. In tutta questa sezione indichiamo con λ_0 un punto isolato di $\sigma(A)$, e fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che ogni $z \in \mathbb{C}$ con $0 < |z - \lambda_0| < \varepsilon$ appartenga a $\rho(A)$.

Poniamo

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A) d\xi,$$

dove γ è una qualunque curva regolare a tratti con immagine in $\{z : \ 0 < |z - \lambda_0| < \varepsilon\}$ e con indice 1 rispetto a λ_0. La curva piú comoda è una circonferenza $t \mapsto \lambda_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con raggio $r < \varepsilon$.

Osserviamo che P (e di conseguenza $I - P$) è una proiezione. Infatti, fissati $0 < r < r' < \varepsilon$ e posto $\gamma(t) = \lambda_0 + re^{it}$, $\gamma'(t) = \lambda_0 + r'e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, si ha

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\gamma R(\lambda, A) d\lambda \int_{\gamma'} R(\xi, A) d\xi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma \times \gamma'} \frac{R(\lambda, A) - R(\xi, A)}{\xi - \lambda} d\lambda \, d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\gamma R(\lambda, A) d\lambda \int_{\gamma'} \frac{1}{\xi - \lambda} d\xi - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma'} R(\xi, A) d\xi \int_\gamma \frac{1}{\xi - \lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Dato che $r' > r$, l'indice di γ rispetto a ogni $\xi \in \gamma'$ è zero, per cui $\int_\gamma 1/(\xi - \lambda) d\lambda = 0$, mentre l'indice di γ' rispetto a ogni $\lambda \in \gamma$ è 1, per cui $\int_{\gamma'} 1/(\xi - \lambda) d\xi = 2\pi i$. Sostituendo si trova $P^2 = P$.

P è detta *proiezione spettrale* (relativa a λ_0).

Osserviamo che $P(X) \subset D(A)$, e $P : X \mapsto D(A)$ è continua, dato che $\xi \mapsto R(\xi, A)$ è continuo su γ con valori in $\mathcal{L}(X, D(A))$. Si ha inoltre

$$AP = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma AR(\xi, A)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\xi R(\xi, A) - I)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \xi R(\xi, A)d\xi$$

per cui anche $AP \in \mathcal{L}(X, D(A))$; iterando il procedimento troviamo che $P \in \mathcal{L}(X, D(A^n))$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $A^n P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \xi^n R(\xi, A)d\xi$.

Proposizione 2.2.1. *Per* $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$*,*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S^{n+1}(\lambda - \lambda_0)^n + P(\lambda - \lambda_0)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D^n(\lambda - \lambda_0)^{-n-1}, \tag{2.2.1}$$

dove

$$\begin{cases} D = (A - \lambda_0 I)P, \\ S = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma R(\xi, A)(\xi - \lambda_0)^{-1}d\xi = \lim_{\lambda\to\lambda_0}(I - P)R(\lambda, A). \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Dimostrazione. Proviamo prima che

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(I - P)R(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\xi, A)(\xi - \lambda_0)^{-1}d\xi.$$

Per $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$ si ha

$$\begin{aligned} PR(\lambda, A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\xi, A)R(\lambda, A)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, A)(\xi - \lambda)^{-1}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\xi, A)(\xi - \lambda)^{-1}d\xi \\ &= R(\lambda, A) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\xi, A)(\xi - \lambda)^{-1}d\xi \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

e l'ultimo integrale tende a S quando λ tende a λ_0.

Ricordiamo ora che $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ è olomorfa con valori in $\mathcal{L}(X)$ nell'insieme $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$. Quindi per ogni $x \in X$, $x' \in X^*$ la funzione $f(\lambda) = x'(R(\lambda, A)x)$ è olomorfa nello stesso insieme con valori in $\mathbb{C}$. Lo sviluppo di Laurent di una qualunque f olomorfa in tale insieme è

$$f(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(\lambda - \lambda_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)(\xi - \lambda_0)^{-n-1}d\xi,$$

dove γ è una delle curve che abbiamo usato finora, e la serie converge per $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}x'(R(\lambda, A)x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{2\pi i} \int_\gamma x'(R(\xi, A)x)(\xi-\lambda_0)^{-n-1} d\xi \\ &= x'\bigg(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)(\xi-\lambda_0)^{-n-1} d\xi \, x\bigg).\end{aligned}$$

Lo sviluppo di Laurent di $R(\lambda, A)$ vicino a $\lambda = \lambda_0$ è dunque

$$\begin{aligned}R(\lambda, A) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)(\xi-\lambda_0)^{-n-1} d\xi \\ &+ (\lambda-\lambda_0)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A) d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)(\xi-\lambda_0)^n d\xi.\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Osserviamo che le due serie in (2.2.4) convergono in $\mathcal{L}(X)$, uniformemente in ogni corona circolare $\delta \le |\lambda - \lambda_0| \le \varepsilon - \delta$, con $0 < \delta \le \varepsilon/2$, per cui i passaggi che abbiamo fatto sopra sono giustificati. Per la convergenza della prima, modifichiamo γ sostituendole una circonferenza γ_1 di centro λ_0 e raggio $r \in (\varepsilon-\delta, \varepsilon)$; dato che $\| \int_{\gamma_1} R(\xi, A)(\xi-\lambda_0)^{-n-1} d\xi\| \le C_1 r^{-n-1}$ la prima serie converge in norma per confronto con una serie geometrica. Per la convergenza della seconda, modifichiamo γ sostituendole una circonferenza γ_2 di centro λ_0 e raggio $r \in (0, \delta)$; dato che $\| \int_{\gamma_2} R(\xi, A)(\xi-\lambda_0)^n d\xi\| \le C_2 r^n$ la seconda serie converge in norma ancora per confronto con una serie geometrica.

Ragionando come sopra si può dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)(\xi-\lambda)^{-n-1} d\xi = (-1)^n S^{n+1}, \tag{2.2.5}$$

e che per $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)(\xi-\lambda)^n d\xi = [(A-\lambda_0)P]^n. \tag{2.2.6}$$

e allora (2.2.1) segue sostituendo (2.2.5), (2.2.6) nello sviluppo di Laurent di $R(\lambda, A)$. ∎

La formula (2.2.1) è quindi lo sviluppo di Laurent di $R(\cdot, A)$ nel punto λ_0. La proiezione P è il residuo di $R(\lambda, A)$ nel punto λ_0 e non è mai l'operatore nullo, altrimenti $R(\cdot, A)$ sarebbe estendibile per continuità nel punto λ_0 grazie alla formula (2.2.1), e per il Corollario 2.1.7 λ_0 apparterrebbe a $\rho(A)$.

Notiamo che nel caso in cui X abbia dimensione finita n allora λ_0 è necessariamente un polo, di ordine al piú n, e l'ordine di polo di λ_0 è uguale all'ordine di zero di λ_0 come radice del polinomio caratteristico $\det(\lambda_0 I - A) = 0$. Infatti ogni componente della matrice associata a $(\lambda I - A)^{-1}$ è del tipo $p_{ij}(\lambda)/\det(\lambda I - A)$, dove p_{ij} è un polinomio.

Se invece X ha dimensione infinita non si può escludere che λ_0 sia una singolarità essenziale, cioè che D^n non sia definitivamente nulla. Vediamo il seguente esempio:

Esempio 2.2.2. Sia $X = \{u \in C([0,1];\mathbb{C}) : \ u(0) = 0\}$ dotato della norma del sup, e sia $A : \ X \to X$ definito da

$$Au(t) = \int_0^t u(s)ds, \ 0 \le t \le 1.$$

Come si vede facilmente, il raggio spettrale di A è zero, per cui 0 è l'unico elemento dello spettro di A. Se fosse un polo, per n sufficientemente grande si avrebbe

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^n R(\lambda, A)u = 0, \quad \forall u \in X. \tag{2.2.7}$$

Invece se prendiamo per esempio $u(t) = t$ si ha $R(\lambda, A)u(t) = e^{t/\lambda} - 1$, e la (2.2.7) non vale.

Osserviamo che per ogni $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda, A)$ commuta con P, essendo

$$R(\lambda, A)P = \frac{R(\lambda, A)}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda, A)R(\xi, A)d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)R(\lambda, A)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)d\xi \, R(\lambda, A) = PR(\lambda, A).$$

Proposizione 2.2.3. *Poniamo*

$$X_1 = P(X), \quad X_2 = (I - P)(X),$$

$$\begin{cases} A_1 : \ X_1 \mapsto X_1, \ A_1 x = Ax \ \ \forall x \in X_1, \\ \\ A_2 : \ D(A_2) = D(A) \cap X_2 \mapsto X_2, \ A_2 x = Ax \ \ \forall x \in D(A_2). \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Allora X_1, X_2 sono spazi di Banach, $A_1 \in L(X_1)$, e

$$\sigma(A_1) = \{\lambda_0\}, \quad \sigma(A_2) = \sigma(A) \setminus \{\lambda_0\}, \tag{2.2.9}$$

Dimostrazione. Dato che P e $I - P$ sono proiezioni, le loro immagini sono chiuse, e quindi sono spazi di Banach con la norma di X.

Sappiamo già che $P(X) \subset D(A)$, e $P : X \mapsto D(A)$ è continua. Quindi A_1 è ben definito, ed appartiene a $\mathcal{L}(X_1)$ dato che $AP = PA$ su $D(A)$ per cui l'immagine di A_1 è contenuta in X_1. Analogamente, l'immagine di A_2 è contenuta in X_2.

Proviamo innanzitutto che $\rho(A) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$.

Dati $y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, l'equazione $\lambda x - Ax = y$ è equivalente, posto $x_1 = Px$, $x_2 = (I - P)x$, al sistema

$$\begin{cases} \lambda x_1 - A_1 x_1 = Py, \\ \\ \lambda x_2 - A_2 x_2 = (I - P)y. \end{cases}$$

Sia $\lambda \in \rho(A)$. Allora le equazioni $\lambda x - Ax = Py$ e $\lambda x - Ax = (I - P)y$ hanno ciascuna un'unica soluzione, rispettivamente $R(\lambda, A)Py$ e $R(\lambda, A)(I - P)y$. Dato che $R(\lambda, A)$

commuta con P e con $I - P$, $R(\lambda, A)Py \in D(A_1)$ e $R(\lambda, A)(I - P)y \in D(A_2)$ per cui $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$.

Viceversa, se $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$ allora il sistema ha soluzione unica (x_1, x_2), che dipende con continuità da y. Ponendo $x = x_1 + x_2$, $x \in D(A)$ dipende con continuità da y e $\lambda x - Ax = y$. x è l'unica soluzione dell'equazione del risolvente perché se $\overline{x}$ è soluzione allora $(P\overline{x}, (I - P)\overline{x})$ risolve il sistema, che per ipotesi ha un'unica soluzione, quindi $P\overline{x} = x_1$, $(I - P)\overline{x} = x_2$ e $\overline{x} = x$.

Gli spettri di A_1 e di A_2 sono quindi contenuti nello spettro di A, e la loro unione è lo spettro di A.

Proviamo ora che $\sigma(A_1) = \{\lambda_0\}$. Per ogni $\lambda \neq \lambda_0$ definiamo

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A)(\lambda - \xi)^{-1} d\xi,$$

essendo γ una circonferenza centrata in λ_0, con raggio $r < \min\{|\lambda - \lambda_0|, \varepsilon\}$. Risulta

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)F(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma [\lambda R(\xi, A) - \xi R(\xi, A) + I](\lambda - \xi)^{-1} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\xi, A) d\xi = P.\end{aligned}$$

Analogamente, si trova

$$F(\lambda)(\lambda I - A) = P \quad \text{su } D(A).$$

Quindi per ogni $x \in X_1$ si ha $(\lambda I - A)F(\lambda)x = x$, $F(\lambda)(\lambda I - A)x = x$. Ciò implica che λ appartiene all'insieme risolvente di A_1, e che $F(\lambda)_{|X_1} = R(\lambda, A_1)$. Dato che $A_1 : X_1 \mapsto X_1$ è continuo, il suo spettro è non vuoto, quindi è costituito dal solo λ_0.

Proviamo ora che $\lambda_0 \in \rho(A_2)$. Sappiamo già che per $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, $\lambda \in \rho(A_2)$ e $R(\lambda, A_2) = (I - P)R(\lambda, A)_{|X_2}$. Per la proposizione 2.2.1 esiste il limite $\lim_{\lambda \to \lambda_0} (I - P)R(\lambda, A) = S$, quindi $R(\lambda, A_2)$ è estendibile per continuità nel punto λ_0. Ne segue che $\lambda_0 \in \rho(A_2)$.

Dato che l'unione degli spettri di A_1 e di A_2 è $\sigma(A)$, e che lo spettro di A_1 è costituito dal solo λ_0, ne segue che $\sigma(A_2) = \sigma(A) \setminus \{\lambda_0\}$. La (2.2.9) è dunque dimostrata. ■

In generale, il sottospazio $X_1 = P(X)$ non coincide col nucleo di $\lambda_0 I - A$, e X_2 non coincide con l'immagine di $\lambda_0 I - A$. L'esempio piú semplice è il caso $X = \mathbb{C}^2$, A definito da $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = e_1$. L'unico autovalore è $\lambda_0 = 0$, e si ha $\text{Ker } A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}$, $\text{Range } A = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$, mentre usando la definizione si vede che $P = I$, $I - P = 0$.

Vale comunque la seguente proposizione.

Proposizione 2.2.4. *Sia λ_0 isolato in $\sigma(A)$. Allora $X_1 \supset \text{Ker}(\lambda_0 I - A)$, e $X_2 \subset \text{Range}(\lambda_0 I - A)$. Inoltre, le condizioni seguenti sono equivalenti.*

(i) $X_1 = \text{Ker }(\lambda_0 I - A)$;

(ii) $X_2 = \text{Range } (\lambda_0 I - A)$*;*

(iii) λ_0 *è un polo semplice di* $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ *(cioè,* $D = 0$*);*

(iv) $\text{Range}(\lambda_0 I - A)$ *è chiuso, e* $X = \text{Ker}(\lambda_0 I - A) \oplus \text{Range}(\lambda_0 I - A)$.

Dimostrazione. Sia $x \in \text{Ker}(\lambda_0 I - A)$. Allora $\lambda_0 x - Ax = 0$, cosicché per $\xi \in \rho(A)$ abbiamo $R(\xi, A)x = (\xi - \lambda_0)^{-1}x$. Ne segue che

$$Px = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\xi - \lambda_0)^{-1} x \, d\xi = x.$$

Quindi, $\text{Ker}(\lambda_0 I - A) \subset X_1$. Per quanto riguarda l'altra inclusione, ricordiamo che $\lambda_0 \in \rho(A_2)$ grazie alla proposizione 2.2.3, per cui $\text{Range}(\lambda_0 I - A) \supset X_2$.

Dimostriamo che $(i) \iff (iii)$, provando che $X_1 \subset \text{Ker}(\lambda_0 I - A)$ se e solo se $D = 0$. Sia $x \in X_1$: allora $x = Px$, cosicché $(\lambda_0 - A)x = (\lambda_0 - A)Px$, e x appartiene a $\text{Ker}(\lambda_0 I - A)$ se e solo se $Dx = 0$. Ciò implica che $X_1 = \text{Ker}(\lambda_0 I - A) \iff D = 0$, e quindi $(i) \iff (iii)$.

Ora dimostriamo che $(ii) \iff (iii)$, provando che $\text{Range}(\lambda_0 I - A) \subset X_2$ se e solo se $D = 0$. Sia $x = \lambda_0 y - Ay$, con $y \in D(A)$. Allora $Px = (\lambda_0 - A)Py = -Dy$, cosicché x appartiene a X_2 se e solo se $Dy = 0$. Questo implica che $X_2 = \text{Range}(\lambda_0 I - A) \iff D = 0$, ossia $(ii) \iff (iii)$.

Ora dimostriamo che $(iii) \iff (iv)$. Supponiamo che valga (iii). Allora $\text{Range}(\lambda_0 I - A) = \text{Range}(I - P)$ è chiuso, dato che $I - P$ è una proiezione. Inoltre, grazie a (i) e a (ii), si ha $X = \text{Ker}(\lambda_0 I - A) \oplus \text{Range } (\lambda_0 I - A)$, quindi vale (iv).

Viceversa, se vale (iv), allora $\text{Range } (\lambda_0 I - A)$, dotato della norma di X, è uno spazio di Banach, e $D(A) \cap \text{Range}(\lambda_0 I - A)$, dotato della norma del grafico di A, è uno spazio di Banach. Questo perché A è un operatore chiuso, dato che ha risolvente non vuoto, per cui il suo dominio è uno spazio di Banach con la norma del grafico, inoltre l'immagine di $(\lambda_0 I - A)$ è chiusa per ipotesi, quindi ogni successione di Cauchy in $D(A) \cap \text{Range}(\lambda_0 I - A)$ converge in tale spazio.

Inoltre, la parte di $\lambda_0 I - A$ in $\text{Range } (\lambda_0 I - A)$, definita da $A_0 : D(A) \cap \text{Range}(\lambda_0 I - A) \mapsto \text{Range } (\lambda_0 I - A)$, $A_0 x = \lambda_0 x - Ax$, è iniettiva dato che se $A_0 x = 0$ allora $x \in \text{Ker}(\lambda_0 I - A) \cap \text{Range}(\lambda_0 I - A)$ per cui $x = 0$. È anche surgettiva, dato che per ogni $y \in \text{Range } (\lambda_0 I - A)$ esiste $x \in D(A)$ tale che $\lambda_0 x - Ax = y$, e posto $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in \text{Range } (\lambda_0 I - A)$, $x_2 \in \text{Ker}(\lambda_0 I - A)$, si ha $(\lambda_0 I - A)x_2 = 0$ per cui $x = x_1 \in \text{Range } (\lambda_0 I - A)$. Di conseguenza, per il teorema dell'applicazione aperta l'inverso è continuo da $\text{Range } (\lambda_0 I - A)$ a $D(A_0)$, e $\lambda_0 \in \rho(A_0)$.

La parte di $\lambda_0 I - A$ in $\text{Ker}(\lambda_0 I - A)$ è l'operatore identicamente nullo. In particolare, per λ vicino a λ_0 si ha $R(\lambda, A)_{|Ker(\lambda_0 I - A)} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} I_{|Ker(\lambda_0 I - A)}$. Dato che $X = \text{Ker}(\lambda_0 I - A) \oplus \text{Range}(\lambda_0 I - A)$, allora λ_0 è un polo semplice di $R(\cdot, A)$, ovvero vale (iii).
∎

Notiamo che se valgono le condizioni della proposizione 2.2.4 allora λ_0 è necessariamente un autovalore. Infatti per la (i) il kernel di $(\lambda_0 I - A)$ è $P(X)$, e sappiamo già che $P \neq 0$, quindi esistono vettori non nulli x (tutti gli elementi di $P(X)$ meno lo zero) tali che $\lambda_0 x - Ax = 0$.

Definizione 2.2.5. *Un autovalore isolato $\lambda_0 \in \sigma(A)$ è detto* autovalore semisemplice *se una delle condizioni equivalenti della proposizione 2.2.4 è soddisfatta.*

Osservazione 2.2.6. Dalla proposizione 2.2.4 segue che se λ_0 è un autovalore semisemplice, allora $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A) \cap \mathrm{Range}\,(\lambda_0 I - A) = \{0\}$, cosicché si ha

$$(v)\ \ \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A) = \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)^2.$$

Sia λ_0 un autovalore isolato. Allora la condizione (v) non è equivalente alle (i), (ii), (iii), (iv) della proposizione 2.2.4: cfr. l'esempio 2.2.8. Comunque, se λ_0 è un polo di $R(\cdot, A)$ e vale (v), allora è un polo semplice: infatti, se λ_0 è un polo di $R(\cdot, A)$ di ordine n, allora $D^{n-1} \neq 0$ e $D^n = 0$, cosicché esiste $x \in X$ tale che $(A-\lambda_0)^{n-1}Px \neq 0$, $(A-\lambda_0)^n Px = 0$, e questo contraddice (v) a meno che $n = 1$, perché se $n \geq 2$ l'elemento $y := (A - \lambda_0)^{n-2}Px$ appartiene al kernel di $(\lambda_0 I - A)^2$ ma non al kernel di $\lambda_0 I - A$.

Quindi, se λ_0 è un polo di $R(\cdot, A)$ (per esempio, se X ha dimensione finita) allora le condizioni da (i) a (v) sono tutte equivalenti.

In base all'osservazione 2.2.6, per dare un esempio di autovalore non semisemplice basta costruire una applicazione lineare da $\mathbb{C}^2$ in sé che violi la condizione (v): per esempio quella associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha 0 come unico autovalore ed elevata al quadrato fa 0.

Vediamo alcuni esempi in dimensione infinita.

Esempio 2.2.7. Consideriamo l'operatore C definito nell'esempio 2.1.2. I suoi autovalori $2k\pi i$ sono tutti semisemplici, infatti dall'espressione del risolvente nella formula (2.1.4) si vede che $2k\pi i$ è un polo semplice per ogni k perché l'unica singolarità è data da $e^\lambda - 1$ (che ha uno zero di ordine 1 per $\lambda = 2k\pi i$) al denominatore. Inoltre, essendo $\lim_{\lambda \to 2k\pi i}(\lambda - 2k\pi i)/(e^\lambda - 1) = 1$ si ha

$$P_k f(\xi) = \lim_{\lambda \to 2k\pi i} (\lambda - 2k\pi i) R(\lambda, C) f(\xi) = e^{2k\pi i \xi} \int_0^1 e^{2k\pi i(1-\eta)} f(\eta) d\eta$$

Esempio 2.2.8. Sia A l'operatore definito nell'esempio 2.2.2. L'unico elemento del suo spettro è 0, e si ha $\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Ker}\ A^2 = \{0\}$, cosicché 0 non è un autovalore di A. Quindi 0 non è un polo semplice di $R(\cdot, A)$, perché se lo fosse allora sarebbe un autovalore. Questo è un esempio di un elemento isolato dello spettro per cui vale la condizione (v), ma che non è un autovalore.

Definizione 2.2.9. *Sia λ_0 un autovalore di A. Allora:*

(i) *Se x appartiene a $D(A^k)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, e $(\lambda_0 I - A)^k x = 0$, allora x è detto* autovettore generalizzato *di A.*

(ii) *Se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che* $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)^k = \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)^{k+1}$*, il minimo di tali interi k è detto l'* ascente *o l'* indice *di λ_0.*

(iii) *La dimensione di* $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)$ *è detta* molteplicità geometrica *di λ_0. La dimensione dello spazio degli autovettori generalizzati è detta* molteplicità algebrica *di λ_0.*

Evidentemente, la molteplicità algebrica di un autovettore è maggiore o uguale alla sua molteplicità geometrica. L'indice di ogni autovalore semisemplice è 1, e la sua molteplicità geometrica è uguale alla sua molteplicità algebrica. L'espressione "molteplicità algebrica viene dal fatto che se $\dim X < \infty$, la dimensione dello spazio degli autovettori generalizzati (che in questo caso coincide con $P(X)$) è uguale alla molteplicità di λ_0 come radice del polinomio caratteristico $\lambda \mapsto \mathrm{Det}\ (A - \lambda I)$.

Definizione 2.2.10. *Un autovalore semisemplice λ_0 è detto* semplice *se la sua molteplicità algebrica (e quindi anche quella geometrica) è uguale a* 1.

Nei casi concreti di applicazioni a equazioni differenziali, il calcolo esplicito della proiezione P può non essere facile. Nei seguente lemmi vediamo casi in cui si dà un criterio per riconoscere P.

Lemma 2.2.11. *Sia λ_0 un autovalore semisemplice di A con autospazio di dimensione finita. Allora l'operatore*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \varepsilon)} R(\lambda, A) d\lambda$$

è l'unica proiezione su Ker$(\lambda_0 I - A)$ che commuta con A.

Dimostrazione. Sia Q una qualunque proiezione su $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)$ che commuta con A, ossia

$$AQx = QAx \quad \forall x \in D(A).$$

Siano $e_1, \ldots, e_n$ una base di $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)$. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i, \quad Qx = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) e_i.$$

Dato che Q commuta con A, per ogni $x \in D(A)$ si ha

$$Q(Ax) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(Ax) e_i = AQ(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_0 \beta_i(x) e_i,$$

cosicché $\beta_i(\lambda_0 x - Ax) = 0$ per ogni i, ovvero Q si annulla su $\mathrm{Range}(\lambda_0 I - A)$. Inoltre, dato che Q è una proiezione, $Q(e_i) = e_i$ per ogni i.

Sia ora $x \in X$. Allora

$$Qx = QPx + Q(I-P)x = QPx = Q\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)Q(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)e_i = Px.$$

■

Lemma 2.2.12. *Sia X uno spazio di Hilbert, e $A : D(A) \subset X \mapsto X$ autoaggiunto. Allora tutti gli autovalori isolati sono semisemplici e reali. Se λ_0 è un autovalore, P è la proiezione ortogonale sull'autospazio relativo.*

Dimostrazione. Proviamo che tutti gli autovalori sono reali. Osserviamo che per ogni $x \in D(A)$ il prodotto $\langle Ax, x\rangle$ è reale: infatti, $\overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle Ax, x\rangle$. Di conseguenza, se x è un autovettore con autovalore λ_0, si ha

$$\lambda_0\|x\|^2 = \langle \lambda_0 x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R},$$

e quindi λ_0 è reale.

Proviamo ora che se λ_0 è isolato allora è semisemplice, dimostrando che $P(X) = \mathrm{Ker}\ (\lambda_0 I - A)$. Dalla Proposizione 2.2.4 sappiamo che Ker $(\lambda_0 I - A) \subset P(X)$, per cui c'è solo da dimostrare che $P(X) \subset \mathrm{Ker}\ (\lambda_0 I - A)$.

La parte di A in $P(X)$ (l'operatore A_1 definito da (2.2.8)) è lineare e continuo in $P(X)$, e il suo spettro è costituito dal solo elemento λ_0, grazie alla proposizione 2.2.3. Il raggio spettrale di $\lambda_0 I - A_1 : P(X) \mapsto P(X)$ è 0. Si ha dunque (vedi le proposizioni 2.1.8 e 2.1.9(i))

$$0 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(\lambda_0 I - A_1)^n\|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\lambda_0 I - A_1\|^n} = \|\lambda_0 I - A_1\|$$

(la norma è quella di $\mathcal{L}(P(X))$). Quindi $A_1 = \lambda_0 I$ su $P(X)$, ovvero $P(X) \subset \mathrm{Ker}\ (\lambda_0 I - A)$.

Il fatto che $\|(\lambda_0 I - A_1)^n\| = \|\lambda_0 I - A_1\|^n$ si dimostra per induzione per gli n pari, usando l'uguaglianza $\|T^*T\| = \|T\|^2$ che è vera per ogni operatore T limitato in uno spazio di Hilbert. Infatti si ha ovviamente $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$ e inoltre

$$\|T^*T\| \geq \sup_{\|x\|=1} \langle x, T^*Tx\rangle = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2.$$

Per gli n dispari ragioniamo per assurdo: se fosse $\|(\lambda_0 I - A_1)^n\| < \|\lambda_0 I - A_1\|^n$ allora avremmo $\|(\lambda_0 I - A_1)^{n+1}\| \leq \|(\lambda_0 I - A_1)^n\|\,\|\lambda_0 I - A_1\| < \|\lambda_0 I - A_1\|^{n+1}$, ma questa disuguaglianza è falsa perché $n+1$ é pari.

Resta da verificare che P è una proiezione ortogonale, cioè che per ogni $x, y \in X$ si ha $\langle Px, (I-P)y\rangle = 0$. Ciò segue dal fatto che P è a sua volta un operatore autoaggiunto (cfr. esercizio 5, §2.2.1), per cui $\langle Px, (I-P)y\rangle = \langle (I-P)Px, y\rangle = 0$. ■

2.2.1 Esercizi

1) Provare che l'autovalore 1 dell'identità è semisemplice (ma non semplice, a meno che la dimensione di X sia 1) e calcolare la relativa proiezione P.

2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dire qual è l'ascente, l'ordine di polo, la molteplicità geometrica e algebrica, e calcolare la proiezione P relativa all'autovalore 0 di ciascuna delle due.

3) Costruire una funzione lineare da $\mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^6$ con autovalori 1, 2, 3 che siano poli del risolvente di ordine 1, 2, 3 rispettivamente.

4) Sia $Q \in \mathcal{L}(X)$ una proiezione. Dopo avere verificato che i suoi autovalori 0, 1 sono semisemplici (cfr. esercizio 7, §2.1.1), calcolare le proiezioni P_0, P_1 relative a tali autovalori.

5) Dimostrare che se H è uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto allora $(R(\lambda, A))^* = R(\overline{\lambda}, A)$ per ogni $\lambda \in \rho(A)$. Dedurne che se λ_0 è un elemento isolato dello spettro di A allora la relativa proiezione P è a sua volta un operatore autoaggiunto.

6) Siano $X = C([0,\pi])$, $D(A_1) = \{f \in C^2([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$, $A_1 f = f''$, $D(A_2) = \{f \in C^2([0,\pi]) : f'(0) = f'(\pi) = 0\}$, $A_2 f = f''$ (cfr. esercizio 9, §2.1.1). Verificare che gli spettri di A_1 e di A_2 sono costituiti da autovalori semplici.

7) Completare la dimostrazione della Prop. 2.2.1, provando che valgono le formule (2.2.5) e (2.2.6).

8) (Generalizzazione della proposizione 2.2.3) Sia A un operatore chiuso tale che $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, con σ_1 compatto, σ_2 chiuso e $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Sia P l'operatore definito da

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda, A) d\lambda,$$

dove γ è una curva regolare chiusa contenuta in $\rho(A)$, che circonda σ_1, orientata in senso antiorario, con indice 1 rispetto a ogni punto di σ e con indice 0 rispetto a ogni punto di $\sigma(A) \setminus \sigma_1$.

P è detto *proiezione spettrale* relativa a σ_1.

Dimostrare che P è una proiezione, che l'immagine di P è contenuta in $D(A)$ e che l'operatore AP è continuo. Dimostrare che lo spettro dell'operatore $A_1 : P(X) \mapsto P(X)$, definito da $A_1 x = Ax$, coincide con σ_1 e che lo spettro dell'operatore $A_2 : (I-P)(X) \cap D(A) \mapsto (I-P)(X)$, definito da $A_2 x = Ax$, coincide con σ_2.

2.3 Un esempio importante: l'operatore di Laplace

In questa sezione studiamo le proprietà spettrali della realizzazione del Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$ con condizione al bordo di Dirichlet in alcuni spazi di Banach. Supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia un aperto limitato, con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2.

Il caso piú semplice è quello Hilbertiano, quando $X = L^2(\Omega)$ e

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \quad Au = \Delta u.$$

Prima di tutto si dimostra che l'insieme risolvente è non vuoto, e anzi contiene l'insieme dei numeri reali positivi. Per fare questo si usano il lemma di Lax-Milgram e un teorema di regolarità delle soluzioni deboli di equazioni differenziali ellittiche.

Lemma 2.3.1. (Lax-Milgram) *Sia H uno spazio di Hilbert reale, e sia $a : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coerciva, cioè tale che esistano costanti C_1, $C_2 > 0$ tali che*

$$|a(u,v)| \le C_1 \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$
$$a(u,u) \ge C_2 \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

Allora per ogni funzionale lineare e continuo $F : H \mapsto \mathbb{R}$ esiste un unico $u \in H$ tale che

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H,$$

ed esiste C tale che $\|u\|_H \le \|F\|_{L(H)}$. Usando il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui, possiamo dire che per ogni $\varphi \in H$ esiste un unico $u \in H$ tale che

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H,$$

ed inoltre $\|u\|_H \le C\|\varphi\|_H$.

Teorema 2.3.2. (Nirenberg) *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2, sia $\lambda \ge 0$ e siano $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^1_0(\Omega)$ tali che*[(1)]

$$\int_\Omega \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx + \lambda \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Allora $u \in H^2(\Omega)$, e $\|u\|_{H^2} \le C\|f\|_{L^2}$, dove C è una costante che dipende solo da Ω e da λ.

Inoltre, se la frontiera è di classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, allora $u \in H^{m+2}(\Omega)$, e $\|u\|_{H^{m+2}} \le C\|f\|_{H^m}$.

Le dimostrazioni del lemma 2.3.1 e del teorema 2.3.2 si possono trovare sul libro di Brezis [4, Cor. V.8, Th. IX.25].

Fissato $\lambda \ge 0$ definiamo la forma bilineare su $H^1_0(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle Du(x), Dv(x) \rangle dx + \lambda \int_\Omega u(x)v(x)dx, \tag{2.3.1}$$

che è ovviamente continua. Per $\lambda > 0$ si vede subito che è coerciva, per $\lambda = 0$ è coerciva grazie alla disuguaglianza di Poincaré: esiste $C > 0$ tale che

$$\int_\Omega u^2 dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad u \in H^1_0(\Omega).$$

[1]Indichiamo con Du il gradiente $(\partial u/\partial x_1, \dots, \partial u/\partial x_n)$, dove le derivate sono intese in senso debole.

Per ogni $f \in L^2(\Omega)$, il funzionale

$$v \mapsto \int_\Omega v(x)f(x)dx$$

è lineare e continuo su $H_0^1(\Omega)$. Per il lemma di Lax-Milgram, per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $a(u,v) = \int_\Omega v(x)f(x)dx$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Per il teorema 2.3.2, $u \in H^2(\Omega)$. Possiamo allora integrare per parti nel primo integrale nella definizione di a, ottenendo

$$\int_\Omega -\Delta u(x)v(x)dx + \lambda \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ovvero

$$\langle (\lambda u - \Delta u - f), v\rangle_{L^2} = 0, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Essendo $\in H_0^1(\Omega)$ denso in $L^2(\Omega)$, si ottiene

$$\langle (\lambda u - \Delta u - f), v\rangle_{L^2} = 0, \;\; \forall v \in L^2(\Omega),$$

e quindi

$$\lambda u - \Delta u = f,$$

e inoltre, sempre per il teorema 2.3.2, $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$. u è l'unica soluzione con valori reali, ma separando parte reale e parte immaginaria si vede che è l'unica soluzione con valori in $\mathbb{C}$. Di conseguenza, $\lambda \in \rho(A)$.

Prendiamo $\lambda = 1$. L'operatore $(I - A)^{-1}$ è compatto, perché è lineare e continuo da $L^2(\Omega)$ in $H^2(\Omega)$, e $H^2(\Omega)$ è immerso con compattezza in $L^2(\Omega)$ (vedere per es. [4, Th. IX.16]). Inoltre è autoaggiunto: per ogni coppia di funzioni f, $g \in L^2(\Omega)$, posto $u = (I - A)^{-1}f$, $v = (I - A)^{-1}g$ si ha $u - \Delta u = f$, $v - \Delta v = g$; moltiplicando la prima uguaglianza per $\overline{v}$ e la seconda per u e integrando per parti si ottiene

$$\int_\Omega (u\overline{v} + \langle \nabla u, \nabla \overline{v}\rangle)dx = \int_\Omega f\overline{v}\, dx = \int_\Omega \overline{g}u\, dx,$$

ossia

$$\langle f, (I - A)^{-1}g\rangle_{L^2} = \langle (I - A)^{-1}f, g\rangle_{L^2}.$$

Come per tutti gli operatori compatti non nulli in spazi di Hilbert di dimensione infinita (vedere per es. [4, Th. VI.8]), $0 \in \sigma(I - A)^{-1}$, e il resto dello spettro è costituito o da un numero finito di autovalori, o da una successione di autovalori che si accumulano nell'origine. Gli autospazi corrispondenti agli autovalori diversi da zero hanno dimensione finita: posto $H_0 = \text{Ker }(\lambda_0 I - (I - A)^{-1})$, la restrizione dell'identità a H_0 è uguale alla restrizione di $\lambda_0^{-1}(I - A)^{-1}$, che è compatto, quindi H_0 deve avere dimensione finita.

Poichè $(I - A)^{-1}$ è compatto e autoaggiunto, e $L^2(\Omega)$ è separabile, esiste una base al piú numerabile di $L^2(\Omega)$ costituita da autovettori di $(I - A)^{-1}$ (vedere per es. [4, Th.VII.11]). Dato che $L^2(\Omega)$ ha dimensione infinita, che gli autospazi relativi agli autovalori diversi da zero hanno dimensione finita, e che 0 non è autovalore, allora gli autovalori sono infiniti.

Dato che per ogni operatore $T : D(T) \subset X \mapsto X$ tale che $0 \in \rho(T)$ si ha $\sigma(T^{-1}) \setminus \{0\} = \sigma(T)^{-1}$ (cfr. esercizio 3, §2.1.1), lo spettro di $I-A$ è costituito da una successione di numeri reali, illimitata, e lo stesso vale per $\sigma(A) = 1 - \sigma(I-A)$.

Gli elementi dello spettro di A sono autovalori, legati come segue agli autovalori di $(I-A)^{-1}$: se e_n è un'autofunzione di $(I-A)^{-1}$ con autovalore μ_n, allora $e_n \in D(A)$ e inoltre

$$(I-A)^{-1}e_n = \mu_n e_n \Longleftrightarrow e_n = \mu_n e_n - \mu_n A e_n \Longleftrightarrow A e_n = \left(1 - \frac{1}{\mu_n}\right) e_n,$$

cosicché e_n è autofunzione di A, con autovalore $1 - 1/\mu_n$. Di conseguenza, $L^2(\Omega)$ *ha una base ortonormale costituita da autovettori di* A.

Inoltre tutti gli autovalori sono negativi: se $\lambda u - \Delta u = 0$, con $u \neq 0$, allora

$$\lambda \|u\|^2 = \int_\Omega \lambda u \,\overline{u} dx = \int_\Omega \Delta u \,\overline{u} dx = -\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \overline{u} \rangle dx = -\|\nabla u\|^2_{L^2}.$$

$\|\nabla u\|_{L^2}$ non può essere 0 perché grazie alla disuguguaglianza di Poincaré se $\|\nabla u\|_{L^2} = 0$ allora u è costante, ma l'unica funzione costante di H^1_0 è la funzione nulla. Quindi il secondo membro è negativo, cosicché λ è negativo.

Consideriamo ora il caso $X = L^p(\Omega)$, con $p \in (1, +\infty)$. Lo spettro della realizzazione del Laplaciano in $L^p(\Omega)$,

$$D(A_p) = W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega), \quad A_p u = \Delta u,$$

coincide con quello del caso $p = 2$, grazie al seguente teorema.

Teorema 2.3.3. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2, e sia $\lambda \in \rho(A_2)$. Allora per ogni $f \in L^p(\Omega)$, l'equazione $\lambda u - A_p u = f$ ha un'unica soluzione $u \in D(A_p)$, ed esiste $C = C(\lambda, p) > 0$ tale che $\|u\|_{W^{2,p}} \leq C\|f\|_{L^p}$.*

Applicando piú volte i teoremi di immersione di Sobolev ($W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = (1/p - 1/n)^{-1}$ se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ se $p > n$, vedere per es. [4, Cor. IX.14]), si vede che le autofunzioni di A_2 appartengono a $L^p(\Omega)$ per ogni $p > 1$. Di conseguenza, anche $\sigma(A_2)$ è contenuto in $\sigma(A_p)$, e quindi $\sigma(A_2) = \sigma(A_p)$.

Consideriamo ora il caso $X = C(\overline{\Omega})$. Non esiste un teorema di regolarità del tipo del teorema 2.3.3, cioè non è detto in generale che se f è continua la soluzione u sia di classe C^2.

Proposizione 2.3.4. *Il problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \\ \\ u = 0 & \text{in } \partial B(0,1) \end{cases}$$

con $f \in C(B(0,1))$, non ha in generale soluzione $u \in C^2(B(0,1))$.

Dimostrazione. Se per ogni $f \in C(B(0,1))$ il problema avesse soluzione in $C^2(B(0,1))$, l'operatore $\Delta : \{u \in C^2(B(0,1)) : \ u = 0 \text{ su } \partial B(0,1)\} \mapsto C(B(0,1))$ sarebbe lineare, continuo e surgettivo, quindi aperto: dovrebbe esistere $C > 0$, indipendente da f, tale che la soluzione soddisfa

$$\|u\|_{C^2(B(0,1))} \leq C\|f\|_\infty. \tag{2.3.2}$$

Per contraddire la (2.3.2), consideriamo le funzioni

$$u_\varepsilon(x,y) = xy\log(x^2+y^2+\varepsilon)$$

con $\varepsilon > 0$. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon(x,y) = y\log(x^2+y^2+\varepsilon), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_\varepsilon(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2+\varepsilon} + \frac{4xy(x^2+y^2+\varepsilon)-4x^3y}{(x^2+y^2+\varepsilon)^2},$$

e usando la formula analoga per $\partial^2/\partial y^2 u_\varepsilon$ otteniamo

$$\Delta u_\varepsilon(x,y) = \frac{12xy}{x^2+y^2+\varepsilon} - \frac{4(x^2+y^2)xy}{(x^2+y^2+\varepsilon)^2},$$

per cui esiste C indipendente da ε tale che

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_\infty \leq C.$$

D'altra parte si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u_\varepsilon(x,y) = \log(x^2+y^2+\varepsilon) + \frac{2y^2}{x^2+y^2+\varepsilon} + \frac{2x^2(x^2+y^2+\varepsilon)-4x^2y^2}{(x^2+y^2+\varepsilon)^2}$$

per cui $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\partial^2 u_\varepsilon/\partial x\partial y\|_\infty = +\infty$. Le funzioni u_ε non si annullano sulla frontiera della palla unitaria per cui non forniscono subito un controesempio alla (2.3.2), ma le possiamo modificare moltiplicando per una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi \equiv 1$ in $B(0,1/2)$, $\varphi \equiv 0$ fuori da $B(0,2/3)$. Le funzioni

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon\varphi$$

appartengono a $C^2(B(0,1))$, si annullano sulla frontiera, e posto $f_\varepsilon = \Delta v_\varepsilon$, si ha $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq C$ indipendente da ε, ma $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\partial^2 v_\varepsilon/\partial x\partial y\|_\infty = +\infty$ e quindi $\lim_{\varepsilon\to 0}\|v_\varepsilon\|_{C^2} = +\infty$. ■

Osserviamo che la dimensione 2 non è essenziale, dato che in dimensione $n > 0$ possiamo comunque considerare le funzioni $u_\varepsilon(x) = x_1x_2\log(x_1^2+x_2^2+\varepsilon)$. Non è nemmeno essenziale che Ω sia una palla, basta portare l'origine in un qualunque punto interno con una traslazione.

Il dominio della realizzazione del Laplaciano in X è dato da

$$D(A_\infty) = \{u \in \cap_{p\geq 1}W^{2,p}(\Omega) : \Delta u \in C(\overline{\Omega}),\ u_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

Per quanto riguarda lo spettro di A_∞, valgono le stesse considerazioni fatte per A_p, ovvero lo spettro di A_∞ coincide con quello di A_2.

Se la condizione al bordo di Dirichlet $u_{|\partial\Omega} = 0$ è sostituita dalla condizione di Neumann $\partial u/\partial\nu = 0$, si possono ripetere gli stessi ragionamenti. Ovviamente il dominio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ va sostituito con $\{u \in H^2(\Omega) : \partial u/\partial\nu = 0\}$, e la forma quadratica (2.3.1) va definita su tutto $H^1(\Omega)$ e non su $H_0^1(\Omega)$. L'altra differenza rilevante è che il primo autovalore è 0, e il kernel è costituito dalle funzioni costanti.

Una trattazione sistematica delle proprietà spettrali degli operatori chiusi si trova nel primo volume di Dunford-Schwarz [6].

Capitolo 3

Semigruppi fortemente continui

3.1 Generalità

Sia X uno spazio di Banach. Si dice che una famiglia di operatori in $\mathcal{L}(X)$ $\{T(t) : t \geq 0\}$ è un *semigruppo* (o un *semigruppo di operatori lineari e continui*) se

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall\, t, s \geq 0$, $T(0) = I$.

Un semigruppo è detto *fortemente continuo* se

(ii) $T(\cdot)x : [0, \infty) \to X$ *è continua per ogni* $x \in X$.

Se non c'è pericolo di confusione, in genere si abbrevia l'espressione $\{T(t) : t \geq 0\}$ scrivendo semplicemente $T(t)$.
Si dice che una famiglia di operatori lineari e continui $\{G(t) : t \in \mathbb{R}\}$ è un *gruppo* (o un *gruppo di operatori lineari e continui*) se

(iii) $G(t+s) = G(t)G(s), \forall\, t, s \in \mathbb{R},\ G(0) = I$,

e che è un *gruppo fortemente continuo* se oltre alla (iii) vale anche

(iv) $G(\cdot)x : \mathbb{R} \to X$ *è continua per ogni* $x \in X$.

Evidentemente G è un gruppo fortemente continuo se e solo se le famiglie di operatori

$$T_+(t) = G(t),\ \ T_-(t) = G(-t)$$

sono semigruppi fortemente continui e inoltre

$$G(t)G(-t) = I,\ \ \forall t \geq 0.$$

Esempio 3.1.1. Sia $A \in \mathcal{L}(X)$, $T(t) = e^{tA}$, allora $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ è un gruppo fortemente continuo. Inoltre l'applicazione $t \mapsto T(t)$ è continua in $[0, +\infty)$ (anzi in tutto $\mathbb{R}$) con valori in $\mathcal{L}(X)$.

Se un semigruppo è tale che l'applicazione $[0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, $t \mapsto T(t)$ è continua, il semigruppo è detto *uniformemente continuo.*

Da notare che vale anche il viceversa: se $T(t)$ è un semigruppo uniformemente continuo allora esiste $A \in \mathcal{L}(X)$ tale che $T(t) = e^{tA}$. Infatti in questo caso gli operatori $V(t) \in \mathcal{L}(X)$

definiti da

$$V(t) := \int_0^t T(s)ds$$

soddisfano, per la proprietà della media delle funzioni continue (es. 9, §1.1.3)

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} V(t) = T(0) = I, \quad \text{in } \mathcal{L}(X),$$

e quindi sono invertibili con inverso continuo per t sufficientemente piccolo (es. 2, §2.1.1). Fissato t_0 tale che $0 \in \rho(V(t_0))$, per $t \geq 0$ scriviamo $T(t)$ come

$$\begin{aligned} T(t) &= V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t) = V(t_0)^{-1}\int_0^{t_0} T(s+t)ds \\ &= V(t_0)^{-1}\int_t^{t_0+t} T(s)ds = V(t_0)^{-1}(V(t+t_0) - V(t)) \end{aligned}$$

Ne segue che $t \mapsto T(t)$ è derivabile in $[0, +\infty)$ con valori in $\mathcal{L}(X)$. Una volta che sappiamo che è derivabile, la derivata soddisfa, per ogni $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - T(0)}{h} T(t) \\ &= \dot{T}(0)T(t) \end{aligned}$$

per cui, posto $A = \dot{T}(0)$ abbiamo $T(t) = e^{tA}$ per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy $T'(t) = AT(t)$, $T(0) = I$.

Esempio 3.1.2. Definiamo il gruppo delle traslazioni ponendo, per ogni $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$(T(t)f)(\xi) = f(\xi + t), \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Sia $X = L^\infty(\mathbb{R})$, oppure $X = C_b(\mathbb{R})$ = lo spazio delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$. Allora $T(t)$ non è né uniformemente né fortemente continuo in X, infatti si ha

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f \in BUC(\mathbb{R}).$$

Sia $X = BUC(\mathbb{R})$. Allora $T(t)$ è fortemente continuo ma non uniformemente continuo in X, infatti si ha

$$\|T(t) - I\| = 2, \ \ \forall t > 0.$$

Per dimostrarlo basta costruire una funzione $f \in BUC(\mathbb{R})$ tale che $f(\xi + t) = -f(\xi)$ per ogni ξ, per esempio $f(\xi) = \sin(\pi\xi/t)$.

Possiamo anche considerare il gruppo delle traslazioni in $C_0(\mathbb{R})$, il sottospazio di $BUC(\mathbb{R})$ che consiste delle funzioni continue aventi limite zero per $x \to \pm\infty$, sempre dotato della norma del sup. $T(t)$ manda $C_0(\mathbb{R})$ in se stesso per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi la sua restrizione a $C_0(\mathbb{R})$ è un gruppo fortemente continuo in $C_0(\mathbb{R})$.

Sia infine $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$. Anche in questi spazi $T(t)$ è fortemente continuo ma non uniformemente continuo, e si ha ancora $\|T(t) - I\| = 2$ per ogni $t > 0$. Per dimostrarlo basta considerare la successione di funzioni $f_n(\xi) = \chi_{(-n,n)}(\xi)\sin(\pi\xi/t)$, per cui si ha $\lim_{n\to\infty} \|T(t)f_n - f_n\|_p/\|f_n\|_p = 2$.

Vediamo ora alcune proprietà elementari dei semigruppi.

Lemma 3.1.3. *Sia $T(t)$ un semigruppo di operatori lineari e continui. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

(a) se esistono $\delta > 0$, $M \geq 1$ per cui

$$\|T(t)\| \leq M, \;\; 0 \leq t \leq \delta,$$

allora si ha anche

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \;\; t \geq 0,$$

con $\omega = (\log M)/\delta$. Inoltre per ogni $x \in X$ la funzione $t \mapsto T(t)x$ è continua in $[0, +\infty)$ se e solo se è continua in 0.

(b) Se $T(t)$ è un semigruppo fortemente continuo, per ogni $\delta > 0$ esiste $M_\delta > 0$ tale che

$$\|T(t)\| \leq M_\delta, \;\; \forall\, t \in [0, \delta].$$

Dimostrazione. (a) Applicando piú volte la (i) si ottiene $T(t) = T(\delta)^{n-1}T(t - (n-1)\delta)$ per $(n-1)\delta \leq t \leq n\delta$, per cui $\|T(t)\| \leq M^n \leq Me^{\omega t}$.

Sia $x \in X$ tale che $t \mapsto T(t)x$ è continua in 0, ossia $\lim_{h\to 0^+} T(h)x = x$. Usando la (i) si vede subito che per ogni $t > 0$ si ha $\lim_{h\to 0^+} T(t+h)x = T(t)x$. Inoltre $\|T(t-h)x - T(t)x\| = \|T(t-h)(x - T(h)x)\| \leq Me^{\omega(t-h)}\|(x - T(h)x)\|$ per $0 < h < t$ e quindi si ha anche $\lim_{h\to 0^+} T(t-h)x = T(t)x$, per cui $t \mapsto T(t)x$ è continua in $[0, +\infty)$.

(b) Sia $x \in X$. Dato che $T(\cdot)x$ è continua, per ogni $\delta > 0$ esiste $M_{\delta,x} > 0$ tale che

$$\|T(t)x\| \leq M_{\delta,x}, \;\; \forall\, t \in [0, \delta].$$

La tesi segue allora dal teorema dell'uniforme limitatezza (cfr. [6, pag. 49]). ■

Osservazione 3.1.4. Osserviamo che se un semigruppo $T(t)$ non è fortemente continuo ma verifica

$$\sup_{0\leq t\leq t_0} \|T(t)\| < \infty$$

per qualche $t_0 > 0$, allora il sottospazio

$$X_0 = \{x \in X : \; t \mapsto T(t)x \in C([0, \infty); X)\}$$

è chiuso in X (per il fatto che se $x_n \to x$ allora $T(\cdot)x_n \to T(\cdot)x$ in $C([0, a]; X)$ per ogni $a > 0$, e il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continuo), e quindi è uno spazio di Banach. La restrizione di $T(t)$ a X_0 è ovviamente un semigruppo fortemente continuo.

Per esempio, se $T(t)$ è il semigruppo delle traslazioni in $X = C_b(\mathbb{R})$, si ha $X_0 = BUC(\mathbb{R})$.

3.1.1 Il generatore infinitesimale di $T(t)$

In questo paragrafo $T(t)$ è un semigruppo fortemente continuo. Consideriamo il rapporto incrementale

$$\Delta_h = \frac{T(h) - I}{h}, \quad h > 0.$$

Vogliamo studiare il limite $\lim_{h\to 0^+} \Delta_h x$ al variare di x in X. Ovviamente se $T(t) = e^{tA}$ con $A \in L(X)$ risulta

$$\lim_{h\to 0^+} \Delta_h = A, \quad \text{in } L(X).$$

Per un semigruppo fortemente continuo tale limite non esiste in generale: basti considerare per esempio il semigruppo delle traslazioni negli spazi funzionali considerati nell'esempio 3.1.2.

Definiamo il *generatore infinitesimale* A di $T(\cdot)$ ponendo

$$D(A) = \{x \in X : \exists \lim_{h\to 0^+} \Delta_h x\}, \quad Ax = \lim_{h\to 0^+} \Delta_h x.$$

Quindi Ax è la derivata destra nel punto $t = 0$ della funzione $t \mapsto T(t)x$, per tutti gli x per cui tale derivata esiste. Non è detto in generale che $D(A) = X$ (cfr. esempio 3.1.2), però $D(A)$ è denso, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 3.1.5. *$D(A)$ è denso in X.*

Dimostrazione. Poniamo

$$M_{a,t}x = \frac{1}{t}\int_a^{a+t} T(s)x\, ds, \quad a \geq 0, \ t > 0.$$

Essendo $s \mapsto T(s)x$ continua, allora (cfr. esercizio 9, §1.1.3)

$$\lim_{t\to 0} M_{a,t}x = T(a)x.$$

In particolare, $\lim_{t\to 0^+} M_{0,t}x = x$ per ogni $x \in X$. Ora dimostriamo che per ogni $t > 0$, $M_{0,t}x \in D(A)$; ne seguirà la tesi. Si ha

$$\begin{aligned}
\Delta_h M_{0,t}x &= \frac{1}{ht}\left(\int_0^t T(h+s)x\, ds - \int_0^t T(s)x\, ds\right) \\
&= \frac{1}{ht}\left(\int_h^{h+t} T(s)x\, ds - \int_0^t T(s)x\, ds\right) \\
&= \frac{1}{ht}\left(\int_t^{h+t} T(s)x\, ds - \int_0^h T(s)x\, ds\right) \\
&= \frac{M_{t,h}x - M_{0,h}x}{t}.
\end{aligned}$$

Quindi per ogni $x \in X$ si ha $M_{0,t}x \in D(A)$ e

$$AM_{0,t}x = \frac{T(t)x - x}{t}$$

Dato che $\lim_{t\to 0^+} M_{0,t}x = x$, $D(A)$ è denso in X. ■

Osservazione 3.1.6. Notiamo che A e $T(t)$ commutano su $D(A)$. Infatti per ogni $x \in X$ e per ogni $h > 0$ si ha $\Delta_h T(t)x = T(t)\Delta_h x$; se $x \in D(A)$ facendo tendere h a 0 si trova che $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$.

Proposizione 3.1.7. *Se $x \in D(A)$ allora $T(\cdot)x$ è derivabile in ogni punto $t \geq 0$ e risulta*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t \geq 0.$$

Dimostrazione. Sia $t_0 \geq 0$ fissato e sia $h > 0$. Si ha

$$\frac{T(t_0+h)x - T(t_0)x}{h} = T(t_0)\Delta_h x \to T(t_0)Ax \quad \text{per } h \to 0^+$$

Ciò prova che $T(\cdot)x$ è derivabile a destra in t_0. Proviamo ora la derivabilità a sinistra, supponendo $t_0 > 0$. Se $h \in (0, t_0)$ si ha

$$\frac{T(t_0-h)x - T(t_0)x}{-h} = T(t_0-h)\Delta_h x \to T(t_0)Ax \quad \text{per } h \to 0^+$$

dato che $\|T(t_0-h)\Delta_h x - T(t_0)Ax\| \leq \|T(t_0-h)(\Delta_h x - Ax)\| + \|(T(t_0-h) - T(t_0))Ax\|$ e $\|T(t_0-h)\| \leq \sup_{0\leq t\leq t_0}\|T(t)\| < \infty$ per il lemma 3.1.3. Quindi $t \mapsto T(t)x$ è derivabile in ogni punto, con derivata $T(t)Ax$, che coincide con $AT(t)x$ grazie all'osservazione precedente. ■

Osservazione 3.1.8. Dalla proposizione 3.1.7 segue che se $T(t)$ è un semigruppo (risp. gruppo) fortemente continuo con generatore A allora per ogni $x \in D(A)$ la funzione $u(t) = T(t)x$ appartiene a $C([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X)$ (risp., $C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}; X)$ e risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ \\ u(0) = x. \end{cases}$$

(risp., l'equazione differenziale è soddisfatta per tutti i $t \in \mathbb{R}$). Osserviamo ora che la soluzione di tale problema è unica: infatti se $u \in C([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X)$ è soluzione, allora fissato $t > 0$ e posto $v(s) = T(t-s)u(s)$ si ha (dimostrare per esercizio) $v'(s) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)u'(s) = 0$ per $0 \leq s \leq t$, per cui $v(t) = v(0)$ ossia $u(t) = T(t)x$.

Si verifica infine facilmente che se $x \in D(A^k)$ con $k \in \mathbb{N}$ allora $u(t) = T(t)x$ appartiene a $C^{k-1}([0,+\infty); D(A)) \cap C^k([0,+\infty); X)$.

Possiamo ora provare che A è un operatore chiuso.

Proposizione 3.1.9. *A è un operatore chiuso.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione in $D(A)$ e siano $x, y \in X$ tali che $x_n \to x$, $Ax_n = y_n \to y$. Grazie alla proposizione 3.1.7 la funzione $t \mapsto T(t)x_n$ è derivabile con continuità in $[0,\infty)$. Per $0 < h < 1$ si ha allora (cfr. esercizio 9, §1.1.3)

$$\Delta_h x_n = \frac{1}{h}\int_0^h AT(t)x_n dt = \frac{1}{h}\int_0^h T(t)y_n dt,$$

per cui

$$\|\Delta_h x - y\| \le \|\Delta_h(x - x_n)\| + \left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(t)(y_n - y)dt\right\| + \left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(t)ydt - y\right\|$$

$$\le \frac{C+1}{h}\|x - x_n\| + C\|y_n - y\| + \left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(t)ydt - y\right\|,$$

con $C = \sup_{0<t<1}\|T(t)\|$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste h_0 tale che per $0 < h \le h_0$ si ha $\|\int_0^h T(t)ydt/h - y\| \le \varepsilon/3$. Dato $h \in (0, h_0]$ prendiamo n grande (dipendente da h) tale che $\|x - x_n\| \le \varepsilon h/3(C+1)$, $\|y_n - y\| \le \varepsilon/3C$, e si ottiene $\|\Delta_h x - y\| \le \varepsilon$. Quindi $x \in D(A)$ e $y = Ax$, cosicché A è chiuso. ■

Osservazione 3.1.10. Osserviamo che se $T(t)$ è un semigruppo (o gruppo) fortemente continuo con generatore A, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ la famiglia di operatori

$$S(t) = e^{\lambda t}T(t), \quad t \ge 0,$$

è un semigruppo fortemente continuo con generatore $A + \lambda I$. Che sia un semigruppo (o un gruppo) fortemente continuo è immediato; per quanto riguarda il generatore si ha, per ogni $x \in X$,

$$\frac{S(h)x - x}{h} = e^{\lambda h}\frac{T(h) - x}{h} + \frac{e^{\lambda h}x - x}{h}$$

e quindi esiste il limite per $h \to 0^+$ di $(S(h)x - x)/h$ se e solo se esiste il limite per $h \to 0^+$ di $(T(h)x - x)/h$. In questo caso, il limite vale $Ax + \lambda x$.

Osservazione 3.1.11. Segue dall'osservazione 3.1.8 che se $x \in D(A^2)$ allora $u(t) = T(t)x$ è in $C^2([0,+\infty); X)$ e $u''(t) = T(t)A^2x$. Usando la formula dell'esercizio 10, §1.1.3 si ottiene quindi per ogni $x \in D(A^2)$

$$T(t)x = x + tAx + \int_0^t (t - s)T(s)A^2x\, ds, \quad t \ge 0.$$

Questa identità può essere usata per ottenere la disuguaglianza interpolatoria

$$\|Ax\| \le C\|x\|^{1/2}\|A^2x\|^{1/2}, \quad x \in D(A^2), \tag{3.1.1}$$

nel caso in cui la norma di $T(t)$ sia limitata in $(0, +\infty)$, e

$$\|Ax\| \leq C\|x\|^{1/2}(\|A^2x\| + \|x\|)^{1/2}, \ \ x \in D(A^2), \tag{3.1.2}$$

nel caso generale.

Infatti, se $\|T(t)\| \leq M$ per ogni $t > 0$, ricavando Ax e maggiorando si trova, per ogni $t > 0$

$$\|Ax\| \leq \frac{\|T(t)x\| + \|x\|}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t (t-s)\|T(s)A^2x\|ds \leq \frac{M+1}{t}\|x\| + \frac{Mt}{2}\|A^2x\|.$$

Se $A^2x = 0$ facendo tendere t a $+\infty$ si ottiene $Ax = 0$ per cui la (3.1.1) è ovviamente soddisfatta; se $A^2x \neq 0$ si sceglie come t il punto di minimo della funzione $t \mapsto (M + 1)\|x\|/t + tM\|A^2x\|/2$ ossia $t = (2(M + 1)\|x\|/M\|A^2x\|)^{1/2}$ e si ottiene la (3.1.1) con $C = \sqrt{2(M+1)/M}$.

Nel caso generale si ha $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ per qualche $\omega \in \mathbb{R}$, se $\omega > 0$ ci si riconduce al caso $\omega = 0$ considerando il semigruppo $S(t) = T(t)e^{-\omega t}$ che ha come generatore $A - \omega I$. La disuguaglianza (3.1.1) applicata a $A - \omega I$ dà, dopo qualche calcolo, la (3.1.2).

Il seguente lemma dà una condizione sufficiente affinché un sottospazio $D \subset D(A)$ sia denso in $D(A)$; in varie applicazioni la condizione è facilmente verificabile (vedere ad es. gli esercizi 4 e 5, §4.3.1). Inizialmente lo avevo messo fra gli esercizi ma vedo che come esercizio è un po' ostico, quindi vi metto la dimostrazione completa.

Lemma 3.1.12. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo $T(t)$ fortemente continuo. Se un sottospazio $D \subset D(A)$ è denso in X e tale che $T(t)(D) \subset D$ per ogni $t > 0$, allora D è denso in $D(A)$, dotato della norma del grafico.*

Dimostrazione. Siano M, ω tali che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ per ogni $t > 0$. Fissiamo $x \in D(A)$, allora abbiamo

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\, ds.$$

Siano ora $x_n \in D$ tali che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in X. Poniamo

$$y_{n,t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x_n\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)(x_n - x)\, ds + \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\, ds.$$

Dato che la funzione $s \mapsto T(s)x_n$ è continua in $[0, +\infty)$ con valori in $D(A)$, l'integrale $\int_0^t T(s)x_n ds$ appartiene a $D(A)$, e inoltre essendo il limite delle somme di Riemann, appartiene alla chiusura di D in $D(A)$, dato che ciascuna somma di Riemann appartiene a D. Quindi ogni $y_{n,t}$ appartiene alla chiusura di D in $D(A)$. Inoltre

$$\|y_{n,t} - x\| \leq \left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)(x_n - x)\, ds\right\| + \left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\, ds - x\right\|$$

tende a 0 per $t \to 0$, $n \to \infty$, e

$$Ay_{n,t} - Ax = \frac{T(t)(x_n - x) - (x_n - x)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\, ds - Ax.$$

Dato $\varepsilon > 0$, fissiamo τ sufficientemente piccolo, in modo che $\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(s)Ax\,ds - Ax\| \leq \varepsilon$, e poi prendiamo n grande, tale che $(Me^{\omega\tau}+1)\|x_n - x\|/\tau \leq \varepsilon$. Con questa scelta di τ e n abbiamo $\|Ay_{n,\tau} - Ax\| \leq 2\varepsilon$, e la tesi segue. ■

Un sottospazio D come nell'enunciato del lemma è detto *core* per l'operatore A. Il lemma implica che l'operatore A è la chiusura della restrizione di A a D, ovvero $D(A)$ è l'insieme degli $x \in X$ tali che esiste una successione di elementi $x_n \in D$ con la proprietà che $x_n \to x$ e Ax_n converge per $n \to \infty$; in questo caso abbiamo $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n$.

3.1.2 Comportamento asintotico

Vediamo ora il comportamento asintotico (per $t \to \infty$) di $\|T(t)\|$, e come tale comportamento sia legato alle proprietà spettrali del generatore A.

Osserviamo che se $X = \mathbb{C}^n$ allora ciascuna componente di $T(t)x$ è data da una combinazione lineare di funzioni del tipo $t^k e^{\lambda_i t}$, con $0 \leq k < n$ e i λ_i sono le radici del polinomio caratteristico, ovvero gli autovalori A. La norma di $T(t)$ si maggiora con $Ct^{n-1}e^{\omega t} \leq C(\varepsilon)e^{(\omega+\varepsilon)t}$ per ogni $\varepsilon > 0$, essendo ω il massimo della parte reale degli elementi dello spettro di A.

Vedremo che nel caso generale si ha una situazione analoga (che risulta completamente analoga nel caso dei semigruppi analitici, cfr. capitolo 4). Se $T(t)$ è un semigruppo fortemente continuo poniamo

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\log \|T(t)\|}{t} \tag{3.1.3}$$

(con la convenzione $\log 0 = -\infty$). Si dice che ω_0 è il *tipo* di $T(\cdot)$.

Proposizione 3.1.13. *Risulta*

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t}.$$

Dimostrazione. La facciamo nel caso $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Basta provare che

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t} \leq \omega_0$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $t_\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{\log \|T(t_\varepsilon)\|}{t_\varepsilon} < \omega_0 + \varepsilon$$

Dividiamo $\mathbb{R}_+$ in intervalli di ampiezza t_ε. Per ogni $t > 0$ siano $n(t) = [t/t_\varepsilon]$, $r(t) = \{t/t_\varepsilon\}$, per cui

$$t = n(t)t_\varepsilon + r(t), \;\; n(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; r(t) \in [0, t_\varepsilon).$$

Usando la proprietà di semigruppo di $T(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\log\|T(t)\|}{t} &= \frac{\log\|T(t_\varepsilon)^{n(t)}T(r(t))\|}{t} \le \frac{n(t)\log\|T(t_\varepsilon)\| + \log\|T(r(t))\|}{n(t)t_\varepsilon + r(t)}\\ &\le \frac{\log\|T(t_\varepsilon)\| + \frac{\log M_{t_\varepsilon}}{n(t)}}{t_\varepsilon + \frac{r(t)}{n(t)}},\end{aligned}$$

con M_{t_ε} dato dal lemma 3.1.3. Per $t \to +\infty$ anche $n(t) \to +\infty$, cosicché

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log\|T(t)\|}{t} \le \frac{\log\|T(t_\varepsilon)\|}{t_\varepsilon} \le \omega_0 + \varepsilon.$$

■

Proposizione 3.1.14. *Se $T(t)$ è di tipo ω_0, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M_\varepsilon \ge 1$ tale che*

$$\|T(t)\| \le M_\varepsilon e^{(\omega_0+\varepsilon)t}, \ \ \forall\, t \ge 0. \tag{3.1.4}$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente si ha $\lim_{t\to+\infty} \log\|T(t)\|/t = \omega_0$, per cui si ha definitivamente $\log\|T(t)\| \le (\omega_0+\varepsilon)t$, ovvero esiste $T_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|T(t)\| \le e^{(\omega_0+\varepsilon)t}, \quad t > T_\varepsilon.$$

Per il Lemma 3.1.3, esiste $M_{T_\varepsilon} \ge 1$ tale che $\|T(t)\| \le M_{T_\varepsilon}$ per ogni $t \in [0, T_\varepsilon]$, per cui

$$\|T(t)\| \le e^{(\omega_0+\varepsilon)t} M_{T_\varepsilon} e^{-(\omega_0+\varepsilon)t} \le e^{(\omega_0+\varepsilon)t} M_{T_\varepsilon} \max\{1, e^{-(\omega_0+\varepsilon)T_\varepsilon}\}, \quad 0 \le t \le T_\varepsilon,$$

e la tesi segue tenendo conto delle due maggiorazioni. ■

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{G}(M,\omega)$ l'insieme dei semigruppi fortemente continui $T(\cdot)$ tali che

$$\|T(t)\| \le Me^{\omega t}, \ \ \forall t \ge 0.$$

Se $M = 1$, $T(t)$ è detto semigruppo di contrazione.

Esempio 3.1.15. Sia $X = BUC(\mathbb{R})$ oppure $X = L^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p < \infty$, e sia $T(t)$ il semigruppo delle traslazioni definito nell'esempio 3.1.2. In ognuno di questi casi si ha $\|T(t)\| = 1$ e quindi $\omega_0 = 0$. Di conseguenza, fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, il semigruppo $S(t) = e^{\lambda t}T(t)$, di generatore $A + \lambda I$ (vedi osservazione 3.1.10), è di tipo λ.

Contrariamente al caso finito dimensionale, ω_0 può anche essere $-\infty$, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.1.16. Sia $X = L^p(0,a)$, $p \geq 1$, oppure $X = \{f \in C([0,a]) : \ f(0) = 0\}$ con $a > 0$ e sia

$$(T(t)f)(\xi) = \begin{cases} f(\xi - t) & \text{se } t \leq \xi \leq a \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Si ha $T(t) = 0$ se $t \geq a$ e quindi $\omega_0 = -\infty$.

Dimostriamo il risultato piú importante di questa sezione.

Proposizione 3.1.17. *Sia $T(t)$ un semigruppo fortemente continuo appartenente a $\mathcal{G}(M,\omega)$ e sia A il suo generatore infinitesimale. Valgono allora le affermazioni seguenti:*

$$\rho(A) \supset \Sigma \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \text{Re } \lambda > \omega\}, \tag{3.1.6}$$

$$R(\lambda, A)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)y \, dt, \ y \in X, \ \ \lambda \in \Sigma, \tag{3.1.7}$$

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(\text{Re } \lambda - \omega)^n} \ \ \forall \, n \in \mathbb{N}, \ \lambda \in \Sigma. \tag{3.1.8}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$F(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)y \, dt, \ y \in X, \ \ \lambda \in \Sigma.$$

Ciò ha senso dato che $T \in \mathcal{G}(M, \omega)$. Si vuole provare che dati $\lambda \in \Sigma$ e $y \in X$ l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha un'unica soluzione data da $x = F(\lambda)y$.

Dimostriamo prima l'unicità, provando che se l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione, questa è data da $x = F(\lambda)y$.

Sia $x \in D(A)$ tale che $\lambda x - Ax = y$. Osserviamo che integrando per parti in ogni intervallo $[0, a]$ e facendo tendere $a \to +\infty$ si ottiene l'identità

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)x \, dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - x.$$

Si ha allora

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)(\lambda x - Ax) dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)x \, dt = x$$

ovvero $F(\lambda)(\lambda x - Ax) = F(\lambda)y = x$. Dimostriamo ora che effettivamente $x = F(\lambda)y$ è soluzione: si ha infatti

$$\Delta_h x = \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)y dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)y dt \right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} T(s)y ds - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)y dt \right) = \frac{1}{h}(e^{\lambda h} - 1)x - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)y dt$$

quindi per $h \to 0^+$ (vedi esercizio 9, §1.1.3)

$$\lim_{h\to 0^+} \Delta_h x = \lambda x - y,$$

per cui $x \in D(A)$ e $Ax = \lambda x - y$.

Proviamo infine le maggiorazioni (3.1.8). Per $n = 1$ la (3.1.8) si ottiene dalla maggiorazione $\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \le Me^{(\omega - Re\,\lambda)t}\|x\|$, integrando in (3.1.7). Dalla maggiorazione per $n = 1$ segue che $\|R^n(\lambda, A)\| \le \|R(\lambda, A)\|^n \le M^n(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^{-n}$ per n qualunque, che coincide con la (3.1.8) solo se $M = 1$, altrimenti è peggiore.

Proviamo le (3.1.8) per M qualunque: dato $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \Sigma$ dalla (3.1.7) segue, derivando k volte rispetto a λ (cosa che si può fare per l'es. 13, §1.1.3), che per ogni $y \in X$ si ha

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda, A)y = \int_0^\infty (-t)^k e^{-\lambda t}T(t)y dt,$$

e quindi

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda, A) \right\| \le M\int_0^\infty t^k e^{-Re\,\lambda t + \omega t}dt = M(\mathrm{Re}\;\lambda - \omega)^{-(k+1)}k!,$$

da cui segue la (3.1.8) ricordando che

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda, A) = (-1)^k k! R(\lambda, A)^{k+1}.$$

■

3.1.3 Esercizi

1) Verificare che il semigruppo delle traslazioni è fortemente continuo negli spazi $C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) :\ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$ (dotato della norma del sup) e $C^1_0(\mathbb{R}) := \{f \in C^1(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f'(x) = 0\}$ (dotato della norma $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$).

Dato $\alpha \in (0, 1)$, verificare che il semigruppo delle traslazioni non è fortemente continuo nello spazio $C^\alpha(\mathbb{R})$ delle funzioni limitate e α-Hölderiane (dotato della norma $f \mapsto \|f\|_\infty + [f]_\alpha$).

2) Per ogni $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ poniamo $T(0)f = f$, e

$$T(t)f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy,\ \ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.9}$$

$T(t)$ è detto *semigruppo di Gauss-Weierstrass.* Provare che esistono le derivate $\partial/\partial x_i T(t)f$, per ogni $t > 0$, $i = 1, \ldots, n$, e verificare che $\|\partial/\partial x_i T(t)f\|_\infty \le C\|f\|_\infty/\sqrt{t}$. Dimostrare che $\lim_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\|_\infty = 0$ se e solo se $f \in BUC(\mathbb{R}^n)$. Calcolare $\|T(t)\|$ e quindi ω_0. Posto $X = BUC(\mathbb{R}^n)$, dimostrare che $BUC^2(\mathbb{R}^n)$ è contenuto nel dominio $D(A)$ del generatore di $T(t)$ in X, e verificare che per ogni $f \in BUC^2(\mathbb{R}^n)$ si ha $Af = \Delta f = \sum_{i=1}^n D_{ii}f$.
(Suggerimento per l'ultima affermazione: osservare che per $t > 0$ la funzione $u(t, x) = T(t)f(x)$ è derivabile rispetto a t e vale $u_t(t, x) = \Delta u(t, x) = (T(t)\Delta f)(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Usare questa formula, e la forte continuità del semigruppo, per stimare $(T(t)f - f)/h - \Delta f$.)

3) Sia $X = BUC(\mathbb{R}^n)$ e sia $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$; per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo $T(t)f(x) = f(e^{tB}x)$. Provare che $T(t)$ è un gruppo, non fortemente continuo in generale. Provare che X_0 contiene il sottospazio Y di tutte le funzioni che hanno limite per $|x| \to \infty$. Trovare il generatore infinitesimale della parte di T in Y.

4) Sia $X = BUC(\mathbb{R})$, sia $T(t)$ il semigruppo delle traslazioni definito nell'esempio 3.1.2, e sia A il suo generatore infinitesimale. Dimostrare che $D(A) = BUC^1(\mathbb{R})$ e che $Af = f'$ (si tratta di dimostrare che se una funzione continua ha derivata destra continua allora è derivabile; il resto è ovvio).

5) Sia $T(t)$ il semigruppo definito da (3.1.5) nello spazio $X = \{f \in C([0,a]) : f(0) = 0\}$. Provare che è fortemente continuo e determinare il suo generatore infinitesimale.

6) Per ogni $f \in BUC(\mathbb{R})$ poniamo $T(0)f = f$, e

$$T(t)f(x) = \frac{t}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{t^2 + |y|^2}\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

$T(t)$ è detto *semigruppo di Cauchy-Poisson*. Dimostrare che $T(t)$ è un semigruppo fortemente continuo in $BUC(\mathbb{R})$. Calcolare $\|T(t)\|$ e quindi ω_0.

Suggerimento: esprimere $T(s)T(t)f$ mediante un integrale doppio, dimostrare in qualche modo (per es. usando il teorema dei residui) che per t, $s > 0$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(s^2 + (y-\xi)^2)(t^2 + y^2)} = \frac{\pi(s+t)}{st(\xi^2 + (s+t)^2)},$$

e poi usare questa formula nell'integrale doppio che dà $T(s)T(t)f$.

7) Sia $G(t)$ un gruppo fortemente continuo, tale che $\|G(t)\| \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\|G(t)\| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

8) (Generalizzazione dell'esercizio 3) Sia $X = BUC(\mathbb{R}^n)$ e sia $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana. Per ogni $f \in X$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo $(T(t)f)(x) = f(\xi(t,x))$, dove $\xi(t,x)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \xi'(t) = F(\xi(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ \\ \xi(0) = x. \end{cases}$$

Provare che $T(t)$ è un gruppo. Per quale F si ottiene il gruppo dell'esercizio 3? Trovare una F non costante per cui $T(t)$ è un gruppo fortemente continuo. Provare che X_0 contiene il sottospazio di tutte le funzioni che hanno limite per $|x| \to \infty$.

9) (Generalizzazione dell'esempio 3.1.2) Sia $X = BUC(\mathbb{R}^n)$ opppure $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, e sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Provare che il gruppo definito da

$$G(t)f(\xi) = f(\xi + tv), \quad t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

è fortemente continuo, calcolare $\|T(t)\|$ e ω_0. Determinare il suo generatore infinitesimale.

10) Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo $T(t)$ e sia x un autovettore di A con autovalore λ. Dimostrare che $T(t)x = e^{\lambda t}x$, per ogni $t \geq 0$.

11) Sia $T(t)$ un semigruppo fortemente continuo con generatore A, e sia $u \in C([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X)$. Dimostrare che per ogni $t > 0$ si ha

$$d/ds\, T(t-s)u(s) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)u'(s),$$

per ogni $s \in [0,t]$ (questo fatto è stato usato nell'osservazione 3.1.8).

12) Dimostrare la proposizione 3.1.13 nel caso $\omega_0 = -\infty$.

3.2 Il teorema di Hille-Yosida

Il risultato principale di questa sezione è il seguente.

Teorema 3.2.1. *Sia $A : D(A) \subset X \to X$ un operatore lineare. Allora A è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo appartenente a $\mathcal{G}(M,\omega)$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

$$\begin{cases} (i) & D(A) \text{ è denso in } X, \\ \\ (ii) & \rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R} :\ \lambda > \omega\}, \\ \\ (iii) & \|(R(\lambda,A))^k\| \leq \dfrac{M}{(\lambda-\omega)^k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, \lambda > \omega. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

La parte piú impegnativa è la dimostrazione della sufficienza delle condizioni (3.2.1). Infatti sappiamo già che se un semigruppo appartiene a $\mathcal{G}(M,\omega)$ allora il suo generatore infinitesimale soddisfa (3.2.1).

Dato un operatore A che verifica (3.2.1) conviene introdurre una successione di operatori limitati che approssimano A in un senso opportuno (gli *approssimanti di Yosida* di A). Poniamo

$$A_n = nAR(n,A) = n^2R(n,A) - nI, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.2}$$

I seguenti lemmi, che saranno usati nella dimostrazione del teorema 3.2.1, hanno interesse anche di per sé; anzi il lemma 3.2.2 è di importanza fondamentale.

Lemma 3.2.2. *Sia $A : D(A) \mapsto X$ un operatore lineare che soddisfa (3.2.1). Allora*

$$\lim_{n\to\infty} nR(n,A)x = x, \quad \forall\, x \in X \tag{3.2.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_nx = Ax, \quad \forall\, x \in D(A). \tag{3.2.4}$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che

$$\lim_{n\to\infty} nR(n,A)x = x, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Infatti per ogni $x \in D(A)$ risulta

$$\|nR(n,A)x - x\| = \|R(n,A)Ax\| \le \frac{M}{n-\omega}\|Ax\|.$$

essendo $D(A)$ denso in X e la famiglia di operatori $nR(n,A)$ equilimitata in norma, la (3.2.3) segue dal lemma 1.1.5.

Per quanto riguarda la (3.2.4) basta notare che se $x \in D(A)$ si ha

$$A_n x = nR(n,A)Ax \to Ax \ \text{ per } n \to \infty.$$

■

Lemma 3.2.3. *Supponiamo che A verifichi le ipotesi* (3.2.1). *Sia A^2 l'operatore lineare definito da*

$$D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}, \ \ A^2x = A(Ax), \ \forall\, x \in D(A^2).$$

Allora A^2 è chiuso e ha dominio denso in X.

Dimostrazione — Dato $x \in D(A)$ si vede facilmente che $x_n = n^2R(n,A)^2x = nR(n,A)\,(x+R(n,A)Ax)$ tende a x per $n \to \infty$. Inoltre la famiglia di operatori $n^2R(n,A)^2$ è equilimitata in norma. Grazie al lemma 1.1.5, per ogni $x \in X$ si ha $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Quindi $D(A^2)$ è denso.

Proviamo che A^2 è chiuso. Siano $x_n \in D(A^2)$ tali che $x_n \to x$, $A^2x_n \to y$.

Se $0 \in \rho(A)$ si applica A^{-1} e si ottiene $Ax_n \to A^{-1}y$, dato che A è chiuso ne segue $x \in D(A)$ e $Ax = A^{-1}y$ cosicché $x \in D(A^2)$ e $A^2x = y$. Nel caso generale sia $\lambda \in \rho(A)$. Applicando $R(\lambda,A)$ a A^2x_n si ottiene $\lambda R(\lambda,A)Ax_n - Ax_n \to R(\lambda,A)y$ per cui $Ax_n \to \lambda AR(\lambda,A)x - R(\lambda,A)y$. Ne segue $x \in D(A)$ e $Ax = R(\lambda,A)(\lambda Ax - y)$ cosicché $x \in D(A^2)$ e $A^2x = (\lambda R(\lambda,A) - I)(\lambda Ax - y) = \lambda Ax - (\lambda Ax - y) = y$. ■

Dimostrazione del teorema 3.2.1 — Per quanto riguarda la necessità delle condizioni, la (i) segue dalla proposizione 3.1.5, la (i) e la (ii) seguono dalla proposizione 3.1.17.

Per quanto riguarda la sufficienza, si dimostrerà che per ogni $x \in X$ e per ogni $t \ge 0$ esiste il limite $\lim_{n\to\infty} e^{tA_n}x$, che chiameremo $T(t)x$, e che la funzione $T(\cdot)$ è un semigruppo con le proprietà enunciate.

Dividiamo la dimostrazione in vari passi.

Primo passo. Vale la stima

$$\|e^{tA_n}\| \le Me^{\frac{\omega nt}{n-\omega}}, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ n > \omega. \tag{3.2.5}$$

Infatti essendo

$$e^{tA_n} = e^{-nt}e^{tn^2R(n,A)} = e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{2k}t^kR^k(n,A)}{k!},$$

dall'ipotesi (3.2.1)(iii) si ottiene

$$\|e^{tA_n}\| \le Me^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{2k}t^k}{(n-\omega)^k k!} = Me^{-nt}e^{\frac{n^2t}{n-\omega}} = Me^{\frac{\omega nt}{n-\omega}}.$$

Secondo passo. Esiste una funzione continua $C : [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ tale che per ogni $x \in D(A^2)$ si ha

$$\|e^{tA_n}x - e^{tA_m}x\| \le C(t)\frac{|m-n|}{(m-\omega)(n-\omega)}\|A^2x\| \ \ \forall m,n>\omega. \tag{3.2.6}$$

Si ha infatti, posto $u_n(t) = e^{tA_n}x$,

$$\frac{d}{dt}(u_n(t)-u_m(t)) = A_n(u_n(t)-u_m(t)) + (A_n - A_m)u_m(t).$$

Scriviamo meglio $(A_n - A_m)x$. Se $x \in D(A)$ si ha

$$\begin{aligned}(A_n - A_m)x &= A(nR(n,A) - mR(m,A))x = A(AR(n,A) - AR(m,A))x \\ &= (m-n)A^2R(n,A)R(m,A)x\end{aligned}$$

e dato che $D(A)$ è denso, si ha

$$(A_n - A_m)x = (m-n)A^2R(n,A)R(m,A)x$$

per ogni $x \in X$. Ne segue

$$\frac{d}{dt}(u_n(t)-u_m(t)) = A_n(u_n(t)-u_m(t)) + (m-n)A^2R(m,A)R(n,A)u_m(t).$$

Dato che $u_n(0) = u_m(0)$ dalla formula di variazione delle costanti (1.2.6) si ottiene

$$u_n(t) - u_m(t) = \int_0^t e^{(t-s)A_n}(m-n)A^2R(m,A)R(n,A)u_m(s)ds$$

$$= (n-m)R(m,A)R(n,A)\int_0^t e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}A^2x ds.$$

Posto $\alpha = \sup\{|\omega k/(k-\omega)| : \ k \in \mathbb{N}, \ k > \omega\}$, usando la maggiorazione (3.2.5) otteniamo

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}A^2x ds\right\| \le M^2\int_0^t e^{\alpha(t-s)}e^{\alpha s}\|A^2x\|ds = M^2te^{\alpha t}\|A^2x\|,$$

e la tesi segue usando le (iii) con $k=1$.

Terzo passo. Per ogni $x \in X$ esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} e^{tA_n}x =: T(t)x \ \text{ in } C([0,a];X) \text{ per ogni } a>0, \tag{3.2.7}$$

e l'applicazione $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$, $t \to T(t)$ è un semigruppo fortemente continuo appartenente a $\mathcal{G}(M,\omega)$.

Infatti dal secondo passo segue che per ogni $x \in D(A^2)$ e per ogni $a > 0$ la successione $\{u_n\}$ è di Cauchy in $C([0,a];X)$. Dato che $D(A^2)$ è denso in X e che $\|u_n(t)\| \le C(a)\|x\|$ per $0 \le t \le a$, ragionando come nel lemma 1.1.5 si vede che per ogni $x \in X$ la successione $\{u_n\}$ è di Cauchy in $C([0,a];X)$, per ogni $a > 0$. Infatti gli operatori lineari $\Gamma_{n,m} : X \mapsto C([0,a];X)$ definiti da $(\Gamma_{n,m}x)(t) = e^{tA_n}x - e^{tA_m}x$ sono tali che $\lim_{n,m\to\infty} \Gamma_{n,m}x = 0$ in $C([0,a];X)$ per ogni $x \in D(A^2)$ che è denso in X, inoltre la norma di $\Gamma_{n,m}$ è limitata da una costante indipendente da n e m per la (3.2.5).

La funzione limite $T(\cdot)x$ è quindi continua in $[0,+\infty)$. Poiché e^{tA_n} è un semigruppo per ogni n, passando al limite si trova che anche $T(\cdot)$ è un semigruppo. Infine per ogni $t \ge 0$ e $x \in X$ si ha, grazie alla (3.2.5)

$$\|T(t)x\| = \lim_{n\to\infty} \|e^{tA_n}x\| \le \lim_{n\to\infty} Me^{\frac{\omega nt}{n-\omega}}\|x\| = Me^{\omega t}\|x\|$$

cosicché $T(\cdot)$ appartiene a $\mathcal{G}(M,\omega)$.

Quarto passo. Se $x \in D(A)$, $T(\cdot)x$ è derivabile e risulta

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad t \ge 0.$$

Per $x \in D(A)$ poniamo $u_n(t) = e^{tA_n}x$ e $v_n(t) = u_n'(t) = e^{tA_n}A_nx$. Sappiamo già che u_n converge uniformemente a $u(t) = T(t)x$ sui compatti di $[0,+\infty)$. Ora verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = T(t)Ax,$$

e tale limite è uniforme se t varia su un qualunque compatto di $[0,+\infty)$. Si ha infatti

$$\|v_n(t) - T(t)Ax\| \le e^{tA_n}(A_nx - Ax)\| + \|(e^{tA_n} - T(t))Ax\|.$$

Ciò implica che u è derivabile (vedi gli esercizi del §1.1.3) e $u'(t) = v(t)$ cosicché $u \in C^1([0,+\infty);X)$.

Quinto passo. A è il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$.

Sia B il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$. Dal quarto passo segue che B è una estensione di $A^{(1)}$, dato che per $x \in D(A)$ la funzione $t \mapsto T(t)x$ è derivabile a destra in 0 con derivata Ax. Basta quindi provare che se $x \in D(B)$ allora $x \in D(A)$. Siano $x \in D(B)$ e $\lambda_0 > \omega$ (quindi $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$). Posto $z = \lambda_0 x - Bx$ (per cui $x = R(\lambda_0,B)z$) si ha

$$z = (\lambda_0 - A)R(\lambda_0,A)z = \lambda_0 R(\lambda_0,A)z - BR(\lambda_0,A)z = (\lambda_0 - B)R(\lambda_0,A)z.$$

Applicando $R(\lambda_0,B)$ si ottiene $x = R(\lambda_0,B)z = R(\lambda_0,A)z \in D(A)$. ■

[1]Cioè $D(B) \supset D(A)$ e $Ax = Bx \; \forall x \in D(A)$. Si scrive anche $B \supset A$.

Corollario 3.2.4. *Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore lineare. Allora A genera un gruppo fortemente continuo $G(t)$ se e solo se esistono $M > 0$, $\omega \geq 0$ tali che*

$$\begin{cases} (i) & D(A) \text{ è denso in } X, \\ \\ (ii) & \rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R} : \ |\lambda| > \omega\}, \\ \\ (iii) & \|R^k(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(|\lambda|-\omega)^k} \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \ \forall \lambda > \omega, \ \forall \lambda < -\omega. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Dimostrazione. Se A genera un gruppo $G(t)$, allora il semigruppo definito da $T(t) = G(-t)$, $t \geq 0$, è fortemente continuo ed è generato da $-A$. Quindi sia A che $-A$ soddisfano le ipotesi (3.2.1), per cui valgono le (3.2.8).

Viceversa, se A soddisfa le (3.2.8) allora sia A che $-A$ soddisfano le (3.2.1) e quindi generano semigruppi fortemente continui $T(t)$, $S(t)$. Posto $G(t) = T(t)$ se $t \geq 0$, $G(t) = S(-t)$ se $t \leq 0$, la funzione $t \mapsto G(t)x$ è continua in $\mathbb{R}$ per ogni $x \in X$. Inoltre, per ogni $x \in D(A)$ si ha

$$\frac{d}{dt} S(t)T(t)x = -AS(t)T(t)x + S(t)AT(t)x = 0, \ \ t \geq 0$$

per cui $S(t)T(t)x = x$, e analogamente $T(t)S(t)x = x$. Dato che $D(A)$ è denso in X ciò è vero per ogni $x \in X$. Quindi $S(t) = (T(t))^{-1}$. Questo implica che $G(\cdot)$ è un gruppo: infatti l'uguaglianza $G(t+s) = G(t)G(s)$ è ovvia se t e s hanno lo stesso segno; se $t > 0$, $s < 0$ e $t+s \geq 0$ abbiamo $G(t)G(s) = T(t)S(-s) = T(t)(T(-s))^{-1}$ mentre $G(t+s) = T(t+s) = T(t+s)T(-s)(T(-s))^{-1} = T(t)(T(-s))^{-1}$; se $t+s \leq 0$ si procede analogamente. ∎

Il semigruppo (o il gruppo) generato da A viene spesso chiamato e^{tA}. Ovviamente e^{tA} non è dato dalla serie esponenziale (1.2.4), a meno che A non sia limitato.

Osservazione 3.2.5. Le condizioni richieste dalle ipotesi del teorema di Hille-Yosida sono infinite, tuttavia se $M = 1$ basta evidentemente imporre la (iii) soltanto per $k = 1$. In tal caso $T \in \mathcal{G}(1, \omega)$.

Definizione 3.2.6. *Se X_0 è un sottospazio di X e $A : D(A) \subset X \mapsto X$ è un operatore lineare, la* parte di A in X_0 *è definita da*

$$\begin{cases} D(A_0) = \{x \in D(A) : \ Ax \in X_0\}, \\ \\ A_0 : D(A_0) \mapsto X_0, \ \ A_0 x = Ax. \end{cases}$$

Osservazione 3.2.7. (cfr. Osservazione 3.1.4) Supponiamo che A sia un operatore lineare chiuso in X tale che valgono le ipotesi (ii) e (iii) del teorema 3.2.1 ma non la (i). Supponiamo cioè che $D(A)$ non sia denso in X. Indichiamo con $X_0 = \overline{D(A)}$ la chiusura di $D(A)$ in X (X_0 è chiuso in X completo quindi è a sua volta uno spazio di Banach) e con A_0 la parte di A in X_0, cioè

$$D(A_0) = \{x \in D(A) : \ Ax \in \overline{D(A)}\}, \ \ A_0 x = Ax, \ \ \forall x \in D(A_0).$$

Si ha evidentemente
$$R(\lambda, A)(X_0) \subset D(A_0), \forall\, \lambda \in \rho(A),$$
e quindi A_0 soddisfa le ipotesi (3.2.1)(ii)(iii). Proviamo che $D(A_0)$ è denso in X_0. Se $x \in X_0$, posto al solito $x_n = nR(n,A)x$ si ha $x_n \in D(A)$, $Ax_n = n(nR(n,A)x - x) \in X_0$ e quindi $x_n \in D(A_0)$. Sappiamo già che $x_n \to x$ per $n \to \infty$, dato che $D(A)$ è denso in X_0. Quindi $D(A_0)$ è denso in X_0.

In definitiva, l'operatore A_0 verifica le ipotesi del teorema di Hille-Yosida nello spazio X_0, e quindi genera un semigruppo $T_0(t)$ in X_0.

Esempio 3.2.8. Ricostruiamo il gruppo delle traslazioni $T(t)f(\xi) = f(\xi + t)$ in $BUC(\mathbb{R})$ partendo dal generatore $A : D(A) = BUC^1(\mathbb{R}) \mapsto BUC(\mathbb{R})$, $Af = f'$. A è chiuso e ha dominio denso, inoltre (cfr. esercizio 5, §2.1.1) $\rho(A) \supset \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ e si ha $R(\lambda, A)f = g_\lambda$, dove

$$g_\lambda(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_\xi^\infty e^{\lambda(\xi - s)} f(s)ds, \ \text{ se } \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^\xi e^{\lambda(\xi - s)} f(s)ds, \ \text{ se } \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases}$$

Vale comunque $\|R(\lambda, A)\| \le |\lambda|^{-1}$ per λ reale $\neq 0$. Quindi A verifica anche l'ipotesi (3.2.8)(ii), con $M = 1$, $\omega = 0$. Se $T(t)$ è il gruppo generato da A, si ha $d/dt\, T(t)f = Af$ per ogni $f \in D(A)$ e quindi, posto $u(t, \xi) = (T(t)f)(\xi)$, u è di classe C^1 e soddisfa

$$\begin{cases} u_t(t,\xi) = u_\xi(t,\xi), \ \ t,\ \xi \in \mathbb{R}, \\ \\ u(0,\xi) = f(\xi). \end{cases}$$

Questo problema di Cauchy si risolve facilmente: posto infatti $v(t,\xi) = u(\xi - t, \xi + t)$, v è di classe C^1 e $v_t(t,\xi) \equiv 0$, quindi $v(t,\xi) = v(\xi,\xi) = u(0, 2\xi) = f(2\xi)$ per ogni $(t,\xi) \in \mathbb{R}^2$. Tornando alla u si ottiene $u(t,\xi) = v((\xi - t)/2, (\xi + t)/2) = f(\xi + t)$ e quindi $T(t)$ è il gruppo delle traslazioni.

Consideriamo ora $X = L^p(\mathbb{R})$, con $1 \le p < \infty$. In questo caso il dominio $D(A)$ della realizzazione della derivata prima in X è lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$, che è denso in X, e la derivata è ovviamente da intendersi in senso debole. Allora A è un operatore chiuso, vedi esempio 1.1.3. Osserviamo ora che per ogni $f \in X$ e per ogni $\lambda \neq 0$ la funzione g_λ definita sopra è in $L^p(\mathbb{R})$. Infatti se $\lambda > 0$ si ha $g_\lambda = \varphi_\lambda \star f$ con $\varphi_\lambda(\xi) = e^{\lambda\xi}\chi_{(-\infty,0)}(\xi)$ che appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. Si ha dunque (vedere per es. [4, Th. IV.15])

$$\|g_\lambda\|_p \le \|\varphi_\lambda\|_1 \|f\|_p = \frac{1}{\lambda}\|f\|_p$$

(una maggiorazione analoga vale se $\lambda < 0$). La verifica che $g_\lambda \in D(A)$ e che $\lambda g_\lambda - g'_\lambda = f$ si può fare in due modi: o direttamente, usando la definizione di derivata debole, oppure approssimando f con una successione di funzioni f_n in $C_0^\infty(\mathbb{R})$, che è denso in X, osservando che le corrispondenti $g_{\lambda n}$ risolvono $g'_{\lambda n} = \lambda g_{\lambda n} - f_n$ in senso stretto e quindi anche in senso debole, e usando il fatto che l'operatore A è chiuso.

Inoltre g_λ è l'unica soluzione dell'equazione del risolvente: se $\lambda g - Ag = 0$ allora g è di classe C^∞ e quindi risolve l'equazione in senso stretto. Pertanto dovrà essere $g(x) = ce^\lambda x$ ma l'unica costante c possibile affinché $g \in L^p(\mathbb{R})$ è $c = 0$.

Di conseguenza A genera un gruppo $T(t)$. Abbiamo appena visto che $T(t)f(\xi) = f(\xi+t)$ per ogni $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Ancora per la densità di $C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ottiene $T(t)f(\xi) = f(\xi+t)$ per ogni $f \in X$.

Esempio 3.2.9. *Equazione del calore in* $\mathbb{R}$. Sia ancora $X = BUC(\mathbb{R})$, e sia A definito da

$$D(A) = BUC^2(\mathbb{R}), \quad Af = f''.$$

A è un operatore chiuso e con dominio denso. Lo spettro di A (cfr. esercizio 6, §2.1.1) è la semiretta $(-\infty, 0]$ e per $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ponendo

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|x|},$$

si ha

$$R(\lambda, A)f = \varphi_\lambda \star f,$$

ossia

$$(R(\lambda, A)f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)} f(y)dy + \int_{x}^{+\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} f(y)dy \right).$$

Poiché $\|g \star f\|_\infty \le \|g\|_{L^1} \|f\|_\infty$ per ogni coppia di funzioni $g \in L^1$, $f \in L^\infty$, si ha

$$\|R(\lambda, A)\| \le \|\varphi_\lambda\|_{L^1} = \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \int_0^{+\infty} e^{-(Re\sqrt{\lambda})x} dx = \frac{1}{|\lambda| \cos\theta/2},$$

essendo $\theta = \arg \lambda$. In particolare, se λ è reale positivo si ottiene

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\lambda},$$

e quindi anche la (3.2.1)(iii) è verificata.

Anche in questo caso si ha una espressione relativamente semplice per e^{tA}, data dalla formula (3.1.9) con $n = 1$ (cfr. esercizio 2, §3.1.3).

Nel caso $X = L^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p < \infty$ si ragiona come nell'esempio precedente, e si vede che la realizzazione della derivata seconda in X, con dominio $D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R})$, genera un semigruppo $T(t)$ che anche in questo caso è dato dalla formula di rappresentazione (3.1.9) con $n = 1$.

Gli esempi appena visti sono fra i pochi casi in cui l'equazione $u' = Au$ si risolve facilmente. In generale risolvere il problema di Cauchy $u'(t) = Au(t), \;\; u(0) = x$ è piú difficile che risolvere l'equazione del risolvente $\lambda x - Ax = y$. Basti pensare agli esempi in cui X è uno spazio di funzioni definite su $\mathbb{R}$ o su un intervallo e A è un operatore differenziale: allora l'equazione del risolvente è un'equazione differenziale ordinaria, mentre il problema di Cauchy è un problema a derivate parziali (c'è in piú la variabile t).

Esempio 3.2.10. *Equazione del calore in un intervallo con condizione di Dirichlet.* Sia $X = C_0([0,\pi]) = \{f \in C([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$, e

$$D(A) = \{f \in C^2([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0) = f''(\pi) = 0\}, \quad Af = f''.$$

Allora $\sigma(A) = \{-n^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ (cfr. esercizio 9, §2.1.1). Per maggiorare la norma di $R(\lambda, A)f$ quando $\lambda > 0$ osserviamo che basta considerare il caso in cui f ha valori reali perché se $f = f_1 + if_2$ con f_1, f_2 reali si ha $R(\lambda, A)(f_1 + if_2) = R(\lambda, A)f_1 + iR(\lambda, A)f_2$, e sia $R(\lambda, A)f_1$ che $R(\lambda, A)f_2$ hanno valori reali. Data $f \in X \setminus \{0\}$ con valori reali, allora $u = R(\lambda, A)f$ è una funzione di classe C^2, non identicamente nulla, che soddisfa

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f, & 0 \le x \le \pi, \\ \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Sia x_0 tale che $|u(x_0)| = \|u\|_\infty$: allora x_0 è punto di massimo o di minimo per u, ed appartiene a $(0,\pi)$ dato che $u(0) = u(\pi) = 0$ e u non è identicamente nulla. Se x_0 è punto di massimo si ha $u(x_0) = \|u\|_\infty > 0$, $u''(x_0) \le 0$, e dall'equazione si ottiene

$$\|u\|_\infty \le \frac{f(x_0)}{\lambda} \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

Analogamente, se x_0 è punto di minimo si ha $u(x_0) = -\|u\|_\infty < 0$, $u''(x_0) \ge 0$, e dall'equazione si ottiene

$$-\|u\|_\infty \ge \frac{f(x_0)}{\lambda} \ge -\frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

In ogni caso si trova dunque $\|u\|_\infty \le \|f\|_\infty/\lambda$, per cui

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

(Si poteva giungere alla stessa conclusione scrivendo l'espressione esplicita di $R(\lambda, A)f$ e maggiorando, vedi Cap. 4). Quindi A soddisfa (3.2.1)(ii)(iii). Inoltre si vede facilmente che il dominio di A è denso in X (basta verificare che C_0^∞ è denso). Di conseguenza A genera un semigruppo fortemente continuo $T(t)$ in X. Per ogni $u_0 \in D(A)$ la funzione $u(t,x) = (T(t)f)(x)$ è derivabile una volta rispetto a t e due volte rispetto a x con derivate continue, ed è l'unica soluzione dell'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & t \ge 0,\ 0 \le x \le \pi, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le \pi, \\ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Si trovano conclusioni simili se scegliamo $X = L^p([0,\pi])$ con $2 \le p < \infty$, e definiamo A come

$$D(A) = W^{2,p}([0,\pi]) \cap W_0^{1,p}([0,\pi]), \quad Af = f''.$$

Anche in questo caso basta considerare funzioni f con valori reali, per cui la funzione $u = R(\lambda, A)f$ ha valori reali. Moltiplichiamo l'identità $\lambda u - u'' = f$ per $|u|^{p-2}u$ e integriamo; si ottiene

$$\int_0^\pi (\lambda |u(x)|^p dx - u''(x)|u(x)|^{p-2}u(x))dx$$

$$= \lambda \int_0^\pi |u(x)|^p dx + (p-1)\int_0^\pi u'(x)^2 |u(x)|^{p-2} dx = \int_0^\pi f(x)|u(x)|^{p-2}u(x)dx.$$

La funzione $x \mapsto |u(x)|^{p-2}u(x)$ appartiene a $L^{(p-1)/p}(0,\pi) = L^{p'}(0,\pi)$; usando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\lambda \|u\|^p \leq \|f\| \bigg(\int_0^\pi |u(x)|^{p'(p-1)} \bigg)^{1/p'} = \|f\| \|u\|^{p-1}$$

e quindi

$$\|R(\lambda, A)f\| = \|u\| \leq \frac{\|f\|}{\lambda}.$$

Nel caso $p = 2$ usando la serie di Fourier di soli seni in $(0,\pi)$ si verifica che

$$(e^{tA}f)(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2 t}\bigg(\int_0^\pi f(\eta)\sin k\eta \, d\eta \bigg) \sin kx, \quad t \geq 0. \tag{3.2.10}$$

Nel capitolo successivo vedremo ulteriori risultati sull'equazione (3.2.9).

Esempio 3.2.11. Sia ora $X = C([0,\pi])$, e

$$D(A) = \{f \in C^2([0,\pi]) : \, f(0) = f(\pi) = 0, \}, \quad Af = f''.$$

Si ha ancora $\sigma(A) = \{-n^2; \; n \in \mathbb{N}\}$, e gli stessi argomenti dell'esempio precedente provano la maggiorazione $\|R(\lambda, A)\| \leq 1/\lambda$ per $\lambda > 0$, cosicché A soddisfa (3.2.1)(ii)(iii). Però il dominio di A non è denso in X, dato che è costituito da funzioni che si annullano in 0 e in π. Quindi A non genera un semigruppo fortemente continuo.

Vedremo in seguito che A genera (in un senso appropriato) un semigruppo $T(t)$ tale che per ogni $f \in X$ la funzione $t \mapsto T(t)f$ è analitica per $t > 0$ ma non è necessariamente continua fino in 0.

Osservazione 3.2.12. Sia X uno spazio di Hilbert. Sia $T(t)$ un semigruppo fortemente continuo appartenente a $\mathcal{G}(1,0)$ e sia A il suo generatore. Se $x \in D(A)$ si ha

$$\text{Re } \langle Ax, x \rangle = \lim_{h \to 0^+} \frac{\text{Re } \langle T(h)x, x\rangle - \|x\|^2}{h}$$

per cui

$$\text{Re } \langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A). \tag{3.2.11}$$

Gli operatori che soddisfano (3.2.11) sono detti *dissipativi*.

Viceversa, se A è un operatore chiuso con dominio denso in uno spazio di Hilbert X che verifica (3.2.11) e tale che $\rho(A) \supset (0, +\infty)$, allora A verifica la (3.2.1)(iii) con $M = 1$, $\omega = 0$ e quindi verifica tutte le ipotesi (3.2.1). Infatti per $\lambda > 0$, $y \in X$ si ha, posto $x = R(\lambda, A)y$,

$$\lambda \|x\|^2 \leq \operatorname{Re} \lambda \|x\|^2 - \operatorname{Re} \langle Ax, x\rangle = \operatorname{Re} \langle \lambda x - Ax, x\rangle = \operatorname{Re} \langle y, x\rangle \leq \|y\| \, \|x\|$$

per cui $\|x\| = \|R(\lambda, A)y\| \leq \|y\|/\lambda$.

Esempio 3.2.13. *Equazione di Schrödinger.* Sia $X = L^2(0, \pi)$ e sia

$$D(A) = H^2(0, \pi) \cap H^1_0(0, \pi), \quad Af = if''.$$

Risulta (cfr. esercizi 3 e 9, §2.1.1) $\sigma(A) = \{-in^2 : \, n \in \mathbb{N}\}$, e per ogni $f \in D(A)$

$$\operatorname{Re} \langle Af, f\rangle = \operatorname{Re} \left(i \int_0^\pi f''(\xi)\overline{f(\xi)} d\xi \right) = \operatorname{Re} \left(-i \int_0^\pi |f'(\xi)|^2 d\xi \right) = 0$$

per cui A e $-A$ soddisfano (3.2.11). Per l'osservazione 3.2.12, A genera un gruppo fortemente continuo. Quindi per ogni $f \in H^2(0, \pi) \cap H^1_0(0, \pi)$ esiste unica $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(0, \pi))$ $\cap \, C(\mathbb{R}; H^2(0, \pi) \cap H^1_0(0, \pi))$ tale che posto $u(t, \xi) = u(t)(\xi)$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) = i \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(t, \xi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \xi \in (0, \pi) \text{ q. ov.}, \\[2ex] u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\[2ex] u(0, \xi) = f(\xi), \quad \xi \in (0, \pi). \end{cases}$$

Essendo $\omega = 0$, $M = 1$ risulta inoltre $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|f\|_{L^2(0,\pi)}$, $\|u_t(t, \cdot)\|_{L^2(0,\pi)} = \|u_{\xi\xi}(t, \cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|f''\|_{L^2(0,\pi)}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Una generalizzazione dell'esempio 3.2.13 è il seguente risultato, dovuto a Stone.

Teorema 3.2.14. *Siano H uno spazio di Hilbert complesso, $D(A) \subset H$ denso e $A : D(A) \subset H \mapsto H$ operatore autoaggiunto. Allora $B = iA$ genera un gruppo e^{itA} di operatori unitari.*

Dimostrazione — Dato che ogni operatore aggiunto è chiuso, allora A è chiuso e quindi B è chiuso.

Verifichiamo che $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è contenuto nell'insieme risolvente di B.

Dato che A è autoaggiunto si ha $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(A)$ e quindi $\operatorname{Re} \langle Bx, x\rangle = 0$ per ogni $x \in D(A) = D(B)$. Ne segue (vedi la dim. dell'osservazione 3.2.12) che $\lambda I - B$ e $-\lambda I - B$ sono iniettivi per ogni $\lambda > 0$, e che $\|(\lambda I - B)^{-1}x\| \leq \|x\|/\lambda$, per ogni $x \in (\lambda I - B)(H)$, $\|(\lambda I + B)^{-1}x\| \leq \|x\|/\lambda$, per ogni $x \in (\lambda I + B)(H)$. Da ciò segue che le immagini di $\lambda I - B$ e $-\lambda I - B$ sono sottospazi chiusi di H (cfr. esercizio 12, §3.2.1). Per dimostrare che $\lambda I - B$ e $-\lambda I - B$ sono surgettivi basta quindi verificare che le loro immagini sono sottospazi densi. Sia y ortogonale all'immagine di $\lambda I - B$, si ha allora $\langle \lambda x - Bx, y\rangle = 0$ per ogni $x \in D(B)$, per cui

$$y \in D(\lambda I - B^\star),\ \ \lambda y - B^\star y = \lambda y + By = 0,$$

e dato che $\lambda I + B$ è iniettivo, $y = 0$. Ne segue che l'immagine di $\lambda I - B$ è densa in H. Allo stesso modo si verifica che l'immagine di $\lambda I + B$ è densa in H. Di conseguenza $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(B)$.

Per l'osservazione 3.2.12 sia B che $-B$ generano semigruppi appartenenti a $\mathcal{G}(1, 0)$. Per il corollario 3.2.4, B genera un gruppo di operatori unitari (cioè di norma 1). Cfr. esercizio 7, §3.1.3. ∎

Esempio 3.2.15. *Equazione delle onde.* Sia $X = H^1_0(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$. Definiamo un prodotto scalare in X ponendo

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_0^\pi u_1'(\xi)\overline{u_2'(\xi)}d\xi + \int_0^\pi v_1(\xi)\overline{v_2(\xi)}d\xi.$$

Sia A la realizzazione della derivata seconda in $L^2(0, \pi)$ con condizione al bordo di Dirichlet, cioè (cfr. esempio 3.2.10)

$$D(A) = H^2(0, \pi) \cap H^1_0(0, \pi),\ \ Af = f'',$$

e definiamo un operatore $\mathcal{A}$ in X come

$$D(\mathcal{A}) = (H^2(0, \pi) \cap H^1_0(0, \pi) \times H^1_0([0, \pi])),\ \ \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u'' \end{pmatrix}. \tag{3.2.12}$$

Il dominio di $\mathcal{A}$ è denso in X. Inoltre si vede facilmente che lo spettro di $\mathcal{A}$ è contenuto in $i\mathbb{R}$ (cfr. esercizio 13, §3.2.1), e che

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A),\ \ \text{se } \mathrm{Re}\,\lambda \neq 0.$$

Inoltre se $(u, v) \in D(\mathcal{A})$ si ha

$$\left\langle \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = \textstyle\int_0^\pi v'(\xi)\overline{u'(\xi)}d\xi + \int_0^\pi u''(\xi)\overline{v(\xi)}d\xi$$

$$= \textstyle\int_0^\pi v'(\xi)\overline{u'(\xi)}d\xi - \int_0^\pi u'(\xi)\overline{v'(\xi)}d\xi \in i\mathbb{R}.$$

L'Osservazione 3.2.12 implica allora che $\mathcal{A}$ genera un gruppo fortemente continuo. Ne segue che per ogni $f \in H^2(0, \pi) \cap H^1_0(0, \pi)$ e per ogni $g \in H^1_0([0, \pi])$ esiste un'unica funzione $u \in C^2(\mathbb{R}; L^2(0, \pi)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^1_0(0, \pi)) \cap C(\mathbb{R}; H^2(0, \pi))$ tale che $u(t, \xi) = u(t)(\xi)$

verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\xi) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(t,\xi), \;\; t \in \mathbb{R}, \; \xi \in (0,\pi) \;\text{ q. ov.}, \\ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \;\; t \in \mathbb{R}, \\ \\ u(0,\xi) = f(\xi), \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\xi) = g(\xi), \; \xi \in (0,\pi). \end{cases}$$

Si ha ancora $M = 1$, $\omega = 0$, e quindi $\|u(t,\cdot)\|_{H^1(0,\pi)} + \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \le \|f\|_{H^1(0,\pi)} + \|g\|_{L^2(0,\pi)}$, $\|u_{tt}(t,\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} + \|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(0,\pi)} \le \|f''\|_{L^2(0,\pi)} + \|g\|_{H^1(0,\pi)}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Osservazione 3.2.16. Negli esempi precedenti abbiamo visto vari semigruppi $T(t)$ fortemente continui in $X = L^p(I)$ con $1 \le p < \infty$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. Per questi semigruppi, se f appartiene al dominio del generatore, la funzione $U(t) = T(t)f$ appartiene a $C^1([0,+\infty); L^p(I))$. Verifichiamo ora che se $U \in C^1([0,+\infty); L^p(I))$ allora posto come al solito $u(t,\xi) = U(t)(\xi)$ per $t \ge 0$, $\xi \in I$, la funzione u è derivabile in senso debole rispetto a t, e la derivata debole è data da $U'(t)(\xi)$.

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty((0,+\infty)\times I)$, la funzione $t \mapsto U(t)\varphi(t,\cdot)$ appartiene a $C^1([0,+\infty); L^p(I))$ e vale

$$\frac{d}{dt}U(t)\varphi(t,\cdot) = U'(t)\varphi(t,\cdot) + U(t)\varphi_t(t,\cdot)$$

(questo si vede usando la definizione) per cui, integrando su $[0,T]$ con T abbastanza grande in modo che il supporto di φ sia contenuto in $(0,T)\times(a,b)$

$$\int_0^T (U'(t)\varphi(t,\cdot) + U(t)\varphi_t(t,\cdot))dt = U(T)\varphi(t,\cdot) - U(0)\varphi(0,\cdot) = 0.$$

Questa è una uguaglianza in $L^p(I)$. Integrando su $[a,b]$ otteniamo

$$\int_a^b \int_0^T U'(t)(\xi)\varphi(t,\xi)dt\, d\xi = -\int_a^b \int_0^T u(t,\xi)\varphi_t(t,\xi)dt\, d\xi$$

ossia

$$\int_I \int_0^\infty U'(t)(\xi)\varphi(t,\xi)dt\, d\xi = -\int_I \int_0^\infty u(t,\xi)\varphi_t(t,\xi)dt\, d\xi$$

il che significa che la funzione $(t,\xi) \mapsto U'(t)(\xi)$ è la derivata debole di u rispetto a t.

Quindi le derivate u_t che compaiono negli esempi 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11, 3.2.13, 3.2.15 sono anche derivate deboli.

3.2.1 Esercizi

1) Dimostrare che se A genera un gruppo fortemente continuo appartenente a $\mathcal{G}(1,\omega)$ allora A^2 genera un semigruppo fortemente continuo appartenente a $\mathcal{G}(1,\omega^2)$.

2) Usando la tecnica dell'esempio 3.2.10, dimostrare che gli operatori

$$A : D(A) = \{f \in C^2([0,\pi]) : \; f'(0) = f'(\pi) = 0\} \mapsto C([0,\pi]), \;\; Af = f'',$$

$$A_p : D(A_p) = \{f \in W^{2,p}(0,\pi) : \; f'(0) = f'(\pi) = 0\} \mapsto L^p(0,\pi), \;\; Af = f'',$$

con $p \geq 2$, generano semigruppi fortemente continui negli spazi $C([0,\pi])$, $L^p(0,\pi)$ rispettivamente.

3) Verificare che per $T > 0$, $1 \leq p < \infty$ l'operatore $A : D(A) = \{f \in W^{1,p}(0,T) : f(0) = f(T)\} \mapsto L^p(0,T)$, $Af = f'$ soddisfa le condizioni del teorema di Hille-Yosida. Suggerimento: per dimostrare che $\|R(\lambda, A)\| \leq 1/\lambda$ per ogni $\lambda > 0$ moltiplicare ambo i membri di $\lambda u - u' = f$ per $|u|^{p-2}u$ (se $p > 1$), per $\text{sign}\, u$ se $p = 1$ e integrare

4) (Generalizzazione dell'esempio 3.2.10) Studiare l'equazione del calore in $(0,\pi)$ con la condizione al bordo di Dirichlet $u = 0$ sostituita dalla condizione di Neumann $u_\xi = 0$, negli spazi $X = C([0,\pi])$, $X = L^p(0,\pi)$.

5) Con riferimento all'esempio 3.2.15, determinare lo spettro dell'operatore $\mathcal{A}$ definito in (3.2.12). Dimostrare che

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A), \;\; \text{se Re}\,\lambda \neq 0.$$

6) Sviluppare in dettaglio l'esempio 3.2.8 nel caso $X = L^p(\mathbb{R})$.

7) (Una generalizzazione delle approssimanti di Yosida in $\mathbb{R}$) Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua e decrescente. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$x_n - \frac{1}{n} f(x_n) = x$$

ha un'unica soluzione x_n. Posto

$$f_n(x) = f(x_n), \;\; x \in \mathbb{R},$$

dimostrare che ogni f_n è decrescente e lipschitziana, con costante di Lipschitz $\leq n$, e che f_n converge uniformemente a f su ogni compatto di $\mathbb{R}$; se inoltre $f \in BUC(\mathbb{R})$ la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$. Osservare che nel caso in cui $f(x) = -ax$ con $a > 0$ le funzioni f_n sono le approssimanti di Yosida di f.

8) Dimostrare che se X è uno spazio di Banach e $T : D(T) \subset X \mapsto X$ è un operatore lineare chiuso iniettivo con inverso continuo (ossia esiste $C > 0$ tale che $\|x\| \leq C\|Tx\|$ per ogni $x \in D(T)$) allora l'immagine di T è un sottospazio chiuso di X. (Questo fatto è usato nella dimostrazione del teorema 3.2.14).

9) Data $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uniformemente continua e limitata dimostrare che la successione di funzioni

$$f_n(x) = n \int_x^{+\infty} e^{n(x-s)} f(s) ds, \;\; x \in \mathbb{R},$$

converge a f uniformemente per $n \to \infty$, in due modi: direttamente, e usando il lemma 3.2.2.

10) Usare l'osservazione 3.1.11 e gli esempi di questa sezione per dimostrare che per ogni $p \geq 1$ si ha

$$\|f'\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}^{1/2}\|f''\|_{L^p}^{1/2}, \ \ \forall f \in W^{2,p}(\mathbb{R});$$

$$\|f''\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}^{1/2}\|f^{(iv)}\|_{L^p}^{1/2}, \ \ \forall f \in W^{4,p}(\mathbb{R}).$$

L'analoga disuguaglianza

$$\|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty^{1/2}\|f''\|_\infty^{1/2}, \ \ \forall f \in C_b^2(\mathbb{R})$$

è vera, ma non importa scomodare la teoria dei semigruppi per dimostrarla: basta usare direttamente la formula di Taylor di f, $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + t^2 f''(\xi)/2$, procedendo poi come nell'osservazione 3.1.11.

11) Sia $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $X = C_0(\mathbb{R})$. Poniamo

$$D(A) = \{u \in X : \ q \cdot u \in X\}, \quad (Au)(s) = q(s)u(s), \ s \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che

(i) se q è illimitata superiormente, A non è il generatore di alcun semigruppo fortemente continuo;

(ii) se q è limitata superiormente, A genera un semigruppo appartenente a $\mathcal{G}(1,\omega)$ con $\omega = \sup q$;

(iii) nel caso (ii), il semigruppo generato da A è dato da $(T(t)f)(s) = e^{tq(s)}f(s)$.

3.3 Problemi non omogenei

Consideriamo il problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t \leq T, \\ \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

dove $A : D(A) \subset X \mapsto X$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo e^{tA}, $T > 0$, $f : [0,T] \mapsto X$ è continua e $x \in X$.

Definizione 3.3.1. *Siano $T > 0$, $f : [0,T] \mapsto X$ una funzione continua, e sia $x \in X$. Allora:*

(i) Una funzione $u \in C^1([0,T];X) \cap C([0,T];D(A))$ è detta soluzione stretta *di (3.3.1) in $[0,T]$ se $u'(t) = Au(t) + f(t)$ per ogni $t \in [0,T]$, e $u(0) = x$.*

(ii) Una funzione $u \in C([0,T];X)$ tale che $u(0) = x$ è detta soluzione forte *di (3.3.1) in $[0,T]$ se esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,T];X) \cap C([0,T];\, D(A))$ tale che*

$$u_n' - Au_n \to f \ \text{ in } C([0,T];X) \text{ per } n \to +\infty,$$

$$u_n \to u \ \text{ in } C([0,T];X) \text{ per } n \to +\infty.$$

Dalla definizione 3.3.1 segue immediatamente che se il problema (3.3.1) ha una soluzione stretta allora $x \in D(A)$.

Vedremo che se (3.3.1) ha una soluzione forte (a maggior ragione, se ha una soluzione stretta) u, allora u è data dalla formula di variazione delle costanti

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds, \;\; 0 \le t \le T. \tag{3.3.2}$$

Tutte le volte che l'integrale in (3.3.2) ha senso, la funzione u definita in (3.3.2) è detta *soluzione mild* di (3.3.1).

Poniamo

$$M_0 = \sup_{0 \le t \le T} \|e^{tA}\|.$$

Lemma 3.3.2. *Se $f : [0,T] \mapsto X$ è continua, la soluzione mild u di* (3.3.1) *è continua in $[0,T]$ con valori in X.*

Dimostrazione. Sappiamo già che la funzione $t \mapsto e^{tA}x$ è continua, resta da considerare la funzione

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds.$$

La funzione $(r,s) \mapsto e^{rA}f(s)$ è continua in $[0,+\infty) \times [0,T]$, e la sua restrizione a $[0,T] \times [0,T]$ è uniformemente continua. Per t, $t_0 \in [0,T]$ si ha, se $t > t_0$,

$$\|v(t) - v(t_0)\| \le \int_0^{t_0} \|e^{(t-s)A}f(s) - e^{(t_0-s)A}f(s)\|ds + \int_{t_0}^t \|e^{(t-s)A}f(s)\|ds$$

$$\le T \sup\{\|e^{r_1A}f(s) - e^{r_2A}f(s)\| : \; r_1, \, r_2 \in [0,T], \; |r_1 - r_2| \le t - t_0\}$$

$$+(t-t_0)M_0 \sup\{\|f(s)\| : \; 0 \le s \le T\}$$

e la tesi segue. ■

Proposizione 3.3.3. *Siano $x \in D(A)$, $f \in C([0,T];D(A))$ oppure $f \in C^1([0,T];X)$. Allora il problema (3.3.1) ha un'unica soluzione stretta, data dalla formula (3.3.2).*

Dimostrazione. Supponiamo $f \in C([0,T];D(A))$. Osserviamo che $(r,s) \mapsto e^{rA}f(s)$ è continua in $[0,T$
$times[0,T]$ con valori in $D(A)$, cosicché la stessa dimostrazione del Lemma 3.3.2 implica che u data da (3.3.2) è continua con valori in $D(A)$. Inoltre si ha $u(0) = x$.

Dimostriamo che u è derivabile e che $u' = Au + f$. Per questo basta verificare che la funzione

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds, \;\; 0 \le t \le T \tag{3.3.3}$$

è derivabile, e che $v' = Av + f$. Per $t \in [0,T]$, $h > 0$ tale che $t + h \in [0,T]$ si ha

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \int_0^t e^{(t-s)A} \; \frac{e^{hA} - I}{h} f(s)\,ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t+h-s)A} f(s)\,ds.$$

Per $h \to 0$ il primo integrale tende a $Av(t)$. Infatti la norma della differenza

$$e^{(t-s)A}\left(\frac{e^{hA}-I}{h}f(s)-Af(s)\right)$$

tende a 0 per ogni $s \in [0,t]$ ed è maggiorata da $2M_0 \sup_{0\le s\le T}\|Af(s)\|$. Il secondo integrale tende a $f(t)$, essendo per $t \le s \le t+h$

$$\|e^{(t+h-s)A}f(s)-e^{(t-s)A}f(t)\| \le \|e^{(t+h-s)A}(f(s)-f(t))\| + \|e^{(t+h-s)A}f(t)-e^{(t-s)A}f(t)\|$$

che tende a 0 per $h \to 0$, e

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t-s)A}f(t)\,ds = f(t).$$

Quindi v è derivabile a destra in ogni $t \in [0,T)$. La derivata destra $v' = Av + f$ è continua con valori in X perché v è continua con valori in $D(A)$.

Per quanto riguarda la derivata sinistra o si ragiona in modo analogo oppure si usa il fatto che se una funzione continua con valori in uno spazio di Banach ha derivata destra continua allora è derivabile (cfr. esercizio 4, §3.1.3).

L'unicità della soluzione stretta è una ovvia conseguenza dell'unicità nel caso omogeneo. Vedi l'osservazione 3.1.8.

Il caso in cui $f \in C^1([0,T];X)$ è simile ed è lasciato per esercizio. ∎

Nel caso in cui f sia solo continua con valori in X si riesce a provare l'esistenza della soluzione forte.

Proposizione 3.3.4. *Siano $x \in X$, $f \in C([0,T];X)$. Allora il problema (3.3.1) ha un'unica soluzione forte, data dalla formula (3.3.2).*

Dimostrazione. Sia u data dalla formula (3.3.2). Per $n \in \mathbb{N}$, $n > \omega$ poniamo

$$x_n = nR(n,A)x, \quad f_n(t) = nR(n,A)f(t), \quad u_n(t) = nR(n,A)u(t).$$

Si ha dunque

$$u_n(t) = e^{tA}x_n + \int_0^t e^{(t-s)A}f_n(s)ds, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.3.4}$$

Dato che $x_n \in D(A)$ e $f_n \in C([0,T];D(A))$, per la proposizione precedente $u_n \in C^1([0,T];X)$ e $u_n'(t) = Au_n(t) + f_n(t)$ per ogni t. Inoltre f_n converge uniformemente a f (dimostrarlo), u_n converge uniformemente a u, per cui u è soluzione forte del problema (3.3.1).

Proviamo l'unicità. Sia u una soluzione forte e sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione come nella definizione 3.3.1(ii). Posto $u_n' - Au_n = f_n$, $x_n = u_n(0)$ vale la (3.3.4) e passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene la (3.3.2). ∎

Per la soluzione forte (e a maggior ragione, per la soluzione stretta) di (3.3.1) vale dunque la maggiorazione

$$\|u(t)\| \le M_0\left(\|x\| + \int_0^t \|f(s)\|ds\right), \quad 0 \le t \le T. \tag{3.3.5}$$

Osserviamo infine che se $f \in C([0,T];X)$ in generale la soluzione forte non è stretta, neanche se $x \in D(A)$. Per esempio per $x = 0$ e $f(t) = e^{tA}y$, con $y \notin D(A)$, si ha $u(t) = te^{tA}y$ che non è derivabile per nessun valore di $t > 0$.

3.3.1 Esercizi

1) Dimostrare la proposizione 3.3.3 nel caso in cui $f \in C^1([0,T];X)$.

2) Dimostrare che se $f \in C([a,b];X)$ allora la successione di funzioni $f_n(t) = nR(n,a)f(t)$ converge a f in $C([a,b];X)$ (questo fatto è usato nella dimostrazione della proposizione 3.3.4).

3) Studiare l'equazione delle onde non omogenea

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\xi) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(t,\xi) + f(t,\xi), \;\; t \in \mathbb{R},\ \xi \in (0,\pi) \;\text{ q. ov.}, \\[2ex] u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \;\; t \in \mathbb{R}, \\[2ex] u(0,\xi) = u_0(\xi), \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\xi) = g(\xi),\ \xi \in (0,\pi), \end{cases}$$

servendosi della proposizione 3.3.3 e dell'esempio 3.2.15.

4) Dimostrare che se $x \in D(A)$ e $f \in C([0,T];D(A))$ allora la funzione u data dalla formula di variazione delle costanti (3.3.2) è continua con valori in $D(A)$ (cfr. dimostrazione della proposizione 3.3.3).

Capitolo 4

Semigruppi analitici

4.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Sia X uno spazio di Banach complesso, con norma $\|\cdot\|$. Ci occuperemo del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \;\; t > 0; \\ \\ u(0) = x, \end{cases}$$

dove $A : D(A) \subset X \to X$ è un *operatore settoriale*.

Definizione 4.1.1. *Un operatore lineare $A : D(A) \subset X \mapsto X$ si dice* settoriale *se esistono costanti $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $M > 0$ tali che*

$$\begin{cases} (i) \quad \rho(A) \supset S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}, \\ \\ (ii) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{|\lambda - \omega|} \;\; \forall \lambda \in S_{\theta,\omega}. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Notiamo che se in piú $D(A)$ è denso e $M = 1$ allora A è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo. Anche nel caso $M = 1$, se $D(A)$ non è denso allora A non può generare un semigruppo fortemente continuo, perché per il teorema di Hille-Yosida la densità del dominio è una condizione necessaria.

Per ogni $t > 0$, (4.1.1) ci permette comunque di definire un operatore lineare limitato e^{tA} in X, per mezzo dell'integrale di Dunford

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} e^{t\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda, \;\; t > 0, \tag{4.1.2}$$

dove $r > 0$, $\eta \in (\pi/2, \theta)$, e $\gamma_{r,\eta}$ è la curva $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| = \eta, \; |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leq \eta, \; |\lambda| = r\}$, orientata in senso antiorario. Poniamo inoltre

$$e^{0A}x = x, \;\; \forall x \in X. \tag{4.1.3}$$

Osserviamo che l'integrale improprio in (4.1.1) è convergente poiché la norma della funzione integranda sulle due semirette è maggiorata da $\exp(t|\lambda|\cos\theta)M/r$, con $\theta > \frac{\pi}{2}$. Parametrizzando $\gamma_{r,\eta} + \omega$ in modo ovvio si ha, per $t > 0$,

$$e^{tA} = \frac{e^{\omega t}}{2\pi i}\bigg(- \int_r^{+\infty} e^{(\xi\cos\eta - i\xi\sin\eta)t} R(\omega + \xi e^{-i\eta}, A) e^{-i\eta} d\xi$$

$$+ \int_{-\eta}^{\eta} e^{(r\cos\alpha + ir\sin\alpha)t} R(\omega + re^{i\alpha}, A) ire^{i\alpha} d\alpha + \int_r^{+\infty} e^{(\xi\cos\eta + i\xi\sin\eta)t} R(\omega + \xi e^{i\eta}, A) e^{i\eta} d\xi \bigg).$$

Inoltre, dato che la funzione $\lambda \mapsto e^{t\lambda}R(\lambda, A)$ è olomorfa in $S_{\theta,\omega}$, la definizione di e^{tA} è indipendente dalla scelta di r e η. Si ha infatti, per $\pi/2 < \eta_1 \le \eta_2 < \theta$,

$$\int_{\gamma_{r_1,\eta_1}+\omega} e^{t\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda - \int_{\gamma_{r_2,\eta_2}+\omega} e^{t\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} e^{t\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = 0$$

dove C_n la curva chiusa ottenuta raccordando $\{\lambda \in \gamma_{r_1,\eta_1} + \omega : \ |\lambda| \le n\} - \{\lambda \in \gamma_{r_2,\eta_2} + \omega : |\lambda| \le n\}$ con due archi di circonferenza di centro ω e raggio n. L'integrale lungo C_n fa zero per ogni n, dato che l'integrando è una funzione olomorfa.

Il seguente teorema illustra le proprietà fondamentali di e^{tA}.

Teorema 4.1.2. *Sia A un operatore settoriale e sia e^{tA} definito da* (4.1.2)*. Allora valgono le affermazioni seguenti.*

(i) $e^{tA}x \in D(A^k)$ *per ogni* $t > 0$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$. *Se* $x \in D(A^k)$, *allora*

$$A^k e^{tA} x = e^{tA} A^k x, \ \ \forall t \ge 0.$$

(ii) $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$, $\ \forall\, t,\ s \ge 0$.

(iii) Esistono costanti M_0, M_1, M_2, $\ldots$, *tali che*

$$\begin{cases} (a) \quad \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \le M_0 e^{\omega t}, \ \ t > 0, \\ \\ (b) \quad \|t^k (A - \omega I)^k e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \le M_k e^{\omega t}, \ \ t > 0, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

dove ω è la costante in (4.1.1). In particolare, da (4.1.4)(b) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ esiste $C_{k,\varepsilon} > 0$ tale che

$$\|t^k A^k e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C_{k,\varepsilon} e^{(\omega+\varepsilon)t}, \ \ t > 0. \tag{4.1.5}$$

(iv) La funzione $t \mapsto e^{tA}$ appartiene a $C^\infty((0, +\infty); \mathcal{L}(X))$, e vale

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{tA} = A^k e^{tA}, \ \ t > 0, \tag{4.1.6}$$

inoltre ha una estensione analitica e^{zA} nel settore $S_{0,\theta-\pi/2}$, e per $z = \rho e^{i\alpha} \in S_{0,\theta-\pi/2}$, $\theta' \in (\pi/2, \theta - \alpha)$ risulta

$$e^{zA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\theta'}+\omega} e^{\lambda z} R(\lambda, A) d\lambda,$$

Dimostrazione. Per semplificare la dimostrazione supponiamo che $\omega = 0$; osserviamo che ci si può ricondurre facilmente a questo caso cambiando A con $A - \omega I$.

Dimostriamo (i). Usando piú volte l'identità $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$, che vale per ogni $\lambda \in \rho(A)$, segue che per ogni $x \in X$, $e^{tA}x$ appartiene a $D(A^k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e che

$$A^k e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\eta}} \lambda^k e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda.$$

Se $x \in D(A)$, l'uguaglianza $Ae^{tA}x = e^{tA}Ax$ segue dalla Definizione 4.1.2 ricordando che $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$. Per $k > 1$, (i) si dimostra per ricorrenza.

Dimostriamo (ii). Per t, $s > 0$ si ha

$$e^{tA}e^{sA} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{r,\eta}} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \int_{\gamma_{2r,\eta'}} e^{\mu t} R(\mu, A) d\mu,$$

con $\eta' \in (\frac{\pi}{2}, \eta)$. Ne segue, ricordando l'identità del risolvente,

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{r,\eta}} \int_{\gamma_{2r,\eta'}} e^{\lambda t + \mu s} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\mu - \lambda} d\lambda d\mu = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{r,\eta}} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \int_{\gamma_{2r,\eta'}} e^{\mu s} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{2r,\eta'}} e^{\mu s} R(\mu, A) d\mu \int_{\gamma_{r,\eta}} e^{\lambda t} \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = e^{(t+s)A}, \end{aligned}$$

dove si sono usate le uguaglianze

$$\int_{\gamma_{2r,\eta'}} e^{\mu s} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} = 2\pi i e^{s\lambda},\ \lambda \in \gamma_{r,\eta}, \quad \int_{\gamma_{r,\eta}} e^{\lambda t} \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = 0,\ \mu \in \gamma_{2r,\eta'}.$$

Proviamo ora (iii). Posto $\lambda t = \xi$, la (4.1.2) diventa

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{rt,\eta}} e^{\xi} R\left(\frac{\xi}{t}, A\right) \frac{d\xi}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\eta}} e^{\xi} R\left(\frac{\xi}{t}, A\right) \frac{d\xi}{t} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_r^{+\infty} e^{se^{i\eta}} R\left(\frac{se^{i\eta}}{t}, A\right) \frac{e^{i\eta}}{t} ds - \int_r^{+\infty} e^{se^{-i\eta}} R\left(\frac{se^{-i\eta}}{t}, A\right) \frac{e^{-i\eta}}{t} ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\eta}^{\eta} e^{re^{i\theta}} R\left(\frac{re^{i\theta}}{t}, A\right) ire^{i\theta} \frac{d\theta}{t} \right), \end{aligned}$$

da cui

$$\|e^{tA}\| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_r^{+\infty} M e^{s\cos\theta} \frac{ds}{s} + \int_{-\eta}^{\eta} M e^{r\cos\theta} d\theta \right\}.$$

Si prova analogamente che $\|Ae^{tA}\| \le N/t$.

Dall'uguaglianza $Ae^{tA} = e^{tA}A$ su $D(A)$ segue che $A^k e^{tA} = (Ae^{\frac{t}{k}A})^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, cosicché
$$\|A^k e^{tA}\| \le (Nkt^{-1})^k =: M_k t^{-k}.$$

Dimostriamo (iv). Dalla definizione segue che $t \mapsto e^{tA}$ è derivabile per $t > 0$ con valori in $\mathcal{L}(X)$, dato che $d/dt\, e^{\lambda t}R(\lambda, A) = \lambda e^{\lambda t}R(\lambda, A)$ è sommabile su $\gamma_{r,\eta}$. Si ha quindi
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} \lambda e^{\lambda t}R(\lambda, A)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} e^{\lambda t}I\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} Ae^{\lambda t}R(\lambda, A)d\lambda \\ &= Ae^{tA}, \;\; t > 0 \end{aligned}$$
dato che il primo integrale è nullo. Procedendo per induzione si trova che
$$\frac{d^k}{dt^k}e^{tA} = A^k e^{tA}, \;\; t > 0.$$

Sia $0 < \alpha < \theta - \pi/2$, e poniamo $\eta = \theta - \alpha$. La funzione
$$z \mapsto e^{zA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} e^{z\lambda}R(\lambda, A)d\lambda$$
è ben definita e olomorfa nel settore
$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \; |\arg z| < \theta - \pi/2 - \alpha\}.$$
L'unione dei settori S_α, per $0 < \alpha < \theta - \pi/2$, è $S_{0,\theta-\frac{\pi}{2}}$, e (iv) segue. ■

Se A è settoriale, la funzione : $[0, +\infty) \mapsto \mathcal{L}(X)$, $t \mapsto e^{tA}$, con e^{tA} definito da (4.1.2)-(4.1.3) viene detta *semigruppo analitico generato da* A in X.

Osserviamo che per ogni $x \in X$ la funzione $t \mapsto e^{tA}x$ è analitica (e quindi continua) per $t > 0$, cosicché e^{tA} è fortemente continuo se e solo se
$$\lim_{t\to 0} e^{tA}x = x \;\; \forall x \in X.$$

Il comportamento per t vicino a 0 di $e^{tA}x$, per $x \in X$, è descritto nella seguente proposizione.

Proposizione 4.1.3. *Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) Se $x \in \overline{D(A)}$, allora $\lim_{t\to 0^+} e^{tA}x = x$. Viceversa, se esiste $y = \lim_{t\to 0^+} e^{tA}x$, allora $x \in \overline{D(A)}$, e $y = x$.

(ii) Per ogni $x \in X$ e $t \geq 0$, l'integrale $\int_0^t e^{sA}x\,ds$ appartiene a $D(A)$, e

$$A\int_0^t e^{sA}x\,ds = e^{tA}x - x.$$

Se inoltre la funzione $s \mapsto Ae^{sA}x$ è integrabile in $(0,\varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$, allora

$$e^{tA}x - x = \int_0^t Ae^{sA}xds, \quad t \geq 0.$$

(iii) Se $x \in D(A)$ e $Ax \in \overline{D(A)}$, allora $\lim_{t\to 0^+}(e^{tA}x - x)/t = Ax$. Viceversa, se esiste $z = \lim_{t\to 0}(e^{tA}x - x)/t$, allora $x \in D(A)$, e $Ax = z \in \overline{D(A)}$.

(iv) Se $x \in D(A)$ e $Ax \in \overline{D(A)}$, allora $\lim_{t\to 0^+} Ae^{tA}x = Ax$.

Dimostrazione. (i) Sia $\omega < \xi \in \rho(A)$, $0 < r < \xi - \omega$. Per ogni $x \in D(A)$, poniamo $y = \xi x - Ax$, cosicché $x = R(\xi, A)y$. Si ha

$$\begin{aligned}
e^{tA}x &= e^{tA}R(\xi,A)y = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} e^{t\lambda}R(\lambda,A)R(\xi,A)y\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} e^{t\lambda}\frac{R(\lambda,A)}{\xi-\lambda}y\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} e^{t\lambda}\frac{R(\xi,A)}{\xi-\lambda}y\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} e^{t\lambda}R(\lambda,A)(\xi-\lambda)^{-1}y\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Ne segue che $\lim_{t\to 0^+} e^{tA}x = R(\xi,A)y = x$. Dato che $D(A)$ è denso in $\overline{D(A)}$, allora (vedere il lemma 1.1.5) $\lim_{t\to 0^+} e^{tA}x = x$ per ogni $x \in \overline{D(A)}$. Viceversa, se $y = \lim_{t\to 0^+} e^{tA}x$, allora $y \in \overline{D(A)}$ perché $e^{tA}x \in D(A)$ per $t > 0$, e fissato un qualunque $\xi \in \rho(A)$ si ha $R(\xi,A)y = \lim_{t\to 0^+} R(\xi,A)\,e^{tA}x = \lim_{t\to 0^+} e^{tA}R(\xi,A)x = R(\xi,A)x$ dato che $R(\xi,A)x \in D(A)$. Quindi, $y = x$.

(ii) Siano $\xi \in \rho(A)$ e $x \in X$. Per ogni $\varepsilon \in (0,t)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^t e^{sA}x\,ds &= \int_\varepsilon^t (\xi - A)R(\xi,A)e^{sA}x\,ds \\
&= \xi\int_\varepsilon^t R(\xi,A)e^{sA}x\,ds - \int_\varepsilon^t \frac{d}{ds}(R(\xi,A)e^{sA}x)\,ds \\
&= \xi\int_\varepsilon^t R(\xi,A)e^{sA}x\,ds - e^{tA}R(\xi,A)x + e^{\varepsilon A}R(\xi,A)x.
\end{aligned}$$

Dato che $R(\xi,A)x$ appartiene a $D(A)$, facendo tendere ε a 0 troviamo

$$\int_0^t e^{sA}x\,ds = \xi R(\xi,A)\int_0^t e^{sA}x\,ds - R(\xi,A)(e^{tA}x - x). \tag{4.1.7}$$

Quindi, $\int_0^t e^{sA}xds \in D(A)$, e $(\xi I - A)\int_0^t e^{sA}xds = \xi\int_0^t e^{sA}xds - (e^{tA}x - x)$, da cui segue la prima affermazione di (ii). Se in piú $s \mapsto \|Ae^{sA}x\| \in L^1(0,T)$, allora $s \mapsto Ae^{sA}x$ è integrabile in senso improprio su $(0,t)$ (cfr. esercizio 11, §1.1.3), e possiamo usare il lemma 1.1.6 per ottenere l'ultima affermazione di (ii).

(iii) Se $x \in D(A)$ e $Ax \in \overline{D(A)}$, abbiamo

$$\frac{e^{tA}x - x}{t} = \frac{1}{t}A\int_0^t e^{sA}xds = \frac{1}{t}\int_0^t e^{sA}Axds.$$

Dato che $s \mapsto e^{sA}Ax$ è continua in $[0,t]$ grazie a (i), allora $\lim_{t\to 0^+}(e^{tA}x - x)/t = Ax$.

Viceversa, se esiste $z = \lim_{t\to 0^+}(e^{tA}x - x)/t$, allora $\lim_{t\to 0^+} e^{tA}x = x$, cosicché x, $z \in \overline{D(A)}$. Inoltre, per ogni $\xi \in \rho(A)$ si ha

$$R(\xi, A)z = \lim_{t\to 0} R(\xi, A)\frac{e^{tA}x - x}{t},$$

e da (ii) segue

$$R(\xi, A)z = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}R(\xi, A)A\int_0^t e^{sA}x\,ds = \lim_{t\to 0}(\xi R(\xi, A) - I)\frac{1}{t}\int_0^t e^{sA}x\,ds.$$

Dato che $x \in \overline{D(A)}$, allora $s \mapsto e^{sA}x$ è continua in $s = 0$, per cui $\lim_{t\to 0} t^{-1}\int_0^t e^{sA}xds = x$ e

$$R(\xi, A)z = \xi R(\xi, A)x - x.$$

In particolare, $x \in D(A)$, e $z = \xi x - (\xi - A)x = Ax$.

(iv) Si tratta di una semplice conseguenza di (i). ∎

Osservazione 4.1.4. Sia $X_0 = \overline{D(A)}$, e sia A_0 la parte di A in X_0 (vedi definizione 3.2.6). Grazie alla proposizione 4.1.3(i), e^{tA_0} è fortemente continuo in X_0. Il suo generatore infinitesimale è A_0, grazie alla proposizione 4.1.3(iii). In particolare, se $D(A)$ è denso in X, e^{tA} è fortemente continuo in X e il suo generatore infinitesimale è A.

Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.1.8}$$

con $u_0 \in X$. Dal teorema 4.1.2 e dalla proposizione 4.1.3 segue che la funzione

$$u(t) = e^{tA}u_0, \quad t \geq 0$$

è analitica con valori in X, anzi in $D(A)$, per $t > 0$, e soddisfa l'equazione differenziale di (4.1.8). Se inoltre $u_0 \in \overline{D(A)}$, è anche continua fino in 0 con valori in X, e quindi è soluzione di (4.1.8). Se in piú $u_0 \in D(A)$, $Au_0 \in \overline{D(A)}$, è derivabile con continuità fino in 0 e si ha $u'(0) = Au_0$, cioè l'equazione differenziale è soddisfatta anche in $t = 0$.

Sempre per la proposizione 4.1.3, se u_0 non appartiene a $\overline{D(A)}$ allora u non è continua fino in 0, e quindi (anche se $e^{0A}u_0 = u_0$ per definizione) il dato iniziale non è assunto nel senso consueto. Si verifica comunque facilmente che

$$\lim_{t\to 0^+} R(\lambda, A)e^{tA}u_0 = R(\lambda, A)u_0 \tag{4.1.9}$$

per ogni $\lambda \in \rho(A)$.

Tutte le proprietà che abbiamo visto finora del semigruppo e^{tA} si deducono dalle proprietà del risolvente $R(\lambda, A)$ per mezzo della formula di rappresentazione (4.1.2). Vale anche una specie di viceversa, nel senso che si può rappresentare $R(\lambda, A)$ tramite il semigruppo e^{tA} ed alcune delle proprietà del risolvente si possono dedurre dalle proprietà del semigruppo.

Proposizione 4.1.5. *Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore settoriale. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con parte reale maggiore di ω si ha*

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}e^{tA}dt. \tag{4.1.10}$$

Dimostrazione. Siano $0 < r < \mathrm{Re}\,\lambda - \omega$ e $\eta \in (\pi/2, \theta)$. Allora

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}e^{tA}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega+\gamma_{r,\eta}} R(z, A)\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t+zt}dt\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega+\gamma_{r,\eta}} R(z, A)(\lambda - z)^{-1}dz = R(\lambda, A).$$

■

Corollario 4.1.6. *Per ogni $t \geq 0$, e^{tA} è iniettivo.*

Dimostrazione. $e^{0A} = I$ è ovviamente iniettivo. Supponiamo che esistano $t_0 > 0$, $x \neq 0$ tali che $e^{t_0A}x = 0$. Allora per $t \geq t_0$, $e^{tA}x = e^{(t-t_0)A}e^{t_0A}x = 0$. Dato che la funzione $t \mapsto e^{tA}x$ è analitica, allora $e^{tA}x \equiv 0$ in $(0, +\infty)$. Dalla proposizione 4.1.5 otteniamo $R(\lambda, A)x = 0$ per $\lambda > \omega$, cosicché $x = 0$, assurdo. ■

Teorema 4.1.7. *Sia $\{T(t) : t > 0\}$ una famiglia di operatori lineari limitati tali che $t \mapsto T(t)$ è derivabile con valori in $\mathcal{L}(X)$, e*

(i) $T(t)T(s) = T(t + s)$, *per ogni* t, $s > 0$;

(ii) *esistono* $\omega \in \mathbb{R}$, M_0, $M_1 > 0$ *tali che* $\|T(t)\| \leq M_0e^{\omega t}$, $\|tT'(t)\| \leq M_1e^{\omega t}$ *per* $t > 0$;

(iii) *vale una delle seguenti condizioni: (a) esiste $t > 0$ tale che $T(t)$ è iniettivo, oppure (b) per ogni $x \in X$, $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$.*

Allora la funzione $t \mapsto T(t)$ è analitica in $(0, +\infty)$ con valori in $\mathcal{L}(X)$, ed esiste un unico operatore settoriale $A : D(A) \subset X \mapsto X$ tale che $T(t) = e^{tA}$ per ogni $t > 0$.

Dimostrazione. La funzione

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt$$

è ben definita e olomorfa nel semispazio $\Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\}$. Per dimostrare la tesi è sufficiente far vedere che

(a) $F(\lambda)$ è estendibile analiticamente a un settore $S_{\eta,\omega}$ con angolo $\eta > \pi/2$, e la norma $\|(\lambda - \omega)F(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)}$ è limitata in $S_{\eta,\omega}$;

(b) esiste un operatore lineare $A : D(A) \subset X \mapsto X$ tale che $F(\lambda) = R(\lambda, A)$ per $\lambda \in S_{\eta,\omega}$.

Per dimostrare (a), proviamo per ricorrenza che $t \mapsto T(t)$ è differenziabile infinite volte e si ha

$$T^{(n)}(t) = (T'(t/n))^n, \;\; t > 0, \; n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.11}$$

L'uguaglianza (4.1.11) è vera per $n = 1$. Se (4.1.11) vale per $n = n_0$, dall'identità $T(t+s) = T(t)T(s)$ otteniamo $T^{(n_0)}(t + s) = T^{(n_0)}(t)T(s) = T^{(n_0)}(s)T(t)$ per ogni t, $s > 0$, e inoltre, scrivendo $t + h$ come $tn_0/(n_0 + 1) + t/(n_0 + 1) + h$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(T^{(n_0)}(t + h) - T^{(n_0)}(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} T^{(n_0)}\left(\frac{tn_0}{n_0 + 1}\right)\left(T\left(\frac{t}{n_0 + 1} + h\right) - T\left(\frac{t}{n_0 + 1}\right)\right) \\
&= \left(T'\left(\frac{t}{n_0 + 1}\right)\right)^{n_0} T'\left(\frac{t}{n_0 + 1}\right) = \left(T'\left(\frac{t}{n_0 + 1}\right)\right)^{n_0+1},
\end{aligned}$$

cosicché esiste $T^{(n_0+1)}(t)$, e vale (4.1.11) per $n = n_0 + 1$. Quindi (4.1.11) vale per ogni n, e implica che

$$\|T^{(n)}(t)\| \le (nM_1/t)^n e^{\omega t} \le (M_1 e)^n t^{-n} n! e^{\omega t}, \;\; t > 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - t)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} T(t)$$

converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z - t| < t(M_1 e)^{-1}$, ovvero nel cerchio di centro t e raggio $t(M_1 e)^{-1}$. L'unione di questi cerchi è il settore $S_{\beta_0,0}$, con $\beta_0 = \arcsin(M_1 e)^{-1}$. Di conseguenza, $t \mapsto T(t)$ è estendibile analiticamente al settore $S_{\beta_0,0}$, e indicando l'estensione con $T(z)$ si ha

$$\|T(z)\| \le (1 - (eM_1)^{-1} \sin\theta)^{-1} e^{\omega Re\, z}, \;\; z \in S_{\beta_0,0}, \; \theta = \arg z.$$

Spostando la semiretta $[0, +\infty)$ sulle semirette $r_\beta = \{\arg z = \beta\}$, con $|\beta| < \beta_0$ (esercizio 14, §4.1.1), otteniamo che vale (a), per ogni $\eta \in (\pi/2, \beta_0)$. Si ha infatti, fissato $\lambda = \omega + \rho e^{i\theta}$, con $-\pi/2 - \beta + \delta \leq \theta \leq \pi/2 - \beta - \delta$, $\delta > 0$ piccolo,

$$\|F(\lambda)\| = \| \int_0^{+\infty} e^{-(\omega+\rho e^{i\theta})e^{i\beta}\xi} T(e^{i\beta}\xi)e^{i\beta} d\xi \|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\xi\rho\cos(\theta+\beta)}}{1-(eM_1)^{-1}\sin\beta} d\xi \leq \frac{1}{1-(eM_1)^{-1}} \frac{1}{\rho\cos(\theta+\beta)}$$

ed essendo $\theta + \beta \in [-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta]$ si ha $\cos(\theta + \beta) \geq \cos(\pi/2 - \delta)$, per cui $\|F(\lambda)\| \leq C/\rho = C/|\lambda - \omega|$.

Dimostriamo (b). È facile vedere che F soddisfa l'identità del risolvente nel semispazio Π: infatti, per $\lambda \neq \mu$, λ, $\mu \in \Pi$, si ha

$$F(\lambda)F(\mu) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt \int_0^{+\infty} e^{-\mu s} T(s) ds$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\mu\sigma} T(\sigma) d\sigma \int_0^{\sigma} e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mu\sigma} T(\sigma) \frac{e^{-(\lambda-\mu)\sigma} - 1}{\lambda - \mu} d\sigma$$

$$= \frac{1}{\lambda - \mu}(F(\lambda) - F(\mu)).$$

Dimostriamo che $F(\lambda)$ è iniettivo per $\lambda \in \Pi$. Supponiamo che esistano $x \neq 0$, $\lambda_0 \in \Pi$ tali che $F(\lambda_0)x = 0$. Dall'identità del risolvente segue facilmente che $F(\lambda)x = 0$ per ogni $\lambda \in \Pi$. Quindi per ogni x' nello spazio duale X',

$$\langle F(\lambda)x, x' \rangle \ = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \langle T(t)x, x' \rangle dt = 0, \quad \forall \lambda \in \Pi.$$

Dato che $\langle F(\lambda)x, x' \rangle$ è la trasformata di Laplace della funzione scalare $t \mapsto \langle T(t)x, x' \rangle$, allora $\langle T(t)x, x' \rangle \equiv 0$ in $(0, +\infty)$. Dato che x' è arbitrario, allora $T(t)x \equiv 0$ in $(0, +\infty)$, che è impossibile se vale (iii)(a) oppure (iii)(b). Di conseguenza, $F(\lambda)$ è iniettivo per ogni $\lambda \in \Pi$. Per la proposizione 2.1.3 esiste un operatore lineare $A : D(A) \subset X \mapsto X$ tale che $\rho(A) \supset \Pi$ e $R(\lambda, A) = F(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \Pi$. Dato che F è olomorfa in $S_{\beta_0,\omega}$, dal Corollario 2.1.6 otteniamo che $\rho(A) \supset S_{\beta_0,\omega}$, e $R(\lambda, A) = F(\lambda)$ per $\lambda \in S_{\beta_0,\omega}$. L'affermazione (b) è cosí dimostrata. ■

Osservazione 4.1.8. Notiamo che nel teorema 4.1.7 le ipotesi (i) e (ii) bastano per dimostrare che il semigruppo è analitico, mentre l'ipotesi (iii) serve per costruire un operatore settoriale che ne sia il generatore.

Diamo infine una condizione sufficiente, apparentemente piú debole della (4.1.1), affinché un operatore lineare sia settoriale.

Proposizione 4.1.9. *Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore lineare tale che $\rho(A)$ contiene un semipiano $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \omega\}$, e*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leq M, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geq \omega, \tag{4.1.12}$$

con $\omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Allora A è settoriale.

Dimostrazione. Per le proprietà degli operatori risolventi, per ogni $r > 0$ l'insieme risolvente di A contiene la palla aperta di centro $\omega + ir$ e raggio $|\omega + ir|/M$. L'unione di queste palle contiene il settore $S = \{\lambda \neq \omega : |\arg(\lambda - \omega)| < \pi - \arctan M\}$. Inoltre per $\lambda \in V = \{\lambda : \mathrm{Re}\ \lambda < \omega,\ |\arg(\lambda - \omega)| \leq \pi - \arctan 2M\}$, $\lambda = \omega + ir - \theta r/M$ con $0 < \theta \leq 1/2$, la formula di sviluppo in serie del risolvente

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n (R(\lambda_0, A))^{n+1}$$

con $\lambda_0 = \omega + ir$ dà

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - (\omega + ir)|^n \frac{M^{n+1}}{(\omega^2 + r^2)^{(n+1)/2}} \leq \frac{2M}{r}.$$

D'altra parte per $\lambda = \omega + ir - \theta r/M$ si ha

$$r \geq (1/(4M^2) + 1)^{-1/2} |\lambda - \omega|,$$

cosicché $\|R(\lambda, A)\| \leq 2M(1/(4M^2) + 1)^{-1/2} |\lambda - \omega|^{-1}$. Ne segue la tesi. ■

4.1.1 Esercizi

1) Sia $A : D(A) \mapsto X$ un operatore settoriale.

(i) Provare che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ l'operatore $B : D(A) \mapsto X$, $B = A + \omega I$, è settoriale, e che vale $\rho(B) = \rho(A) + \omega$, $e^{tB} = e^{\omega t} e^{tA}$.

(ii) Provare che per ogni $\alpha > 0$ l'operatore $C : D(A) \mapsto X$, $C = \alpha A$, è settoriale, e che vale $\rho(C) = \alpha \rho(A)$, $e^{tC} = e^{(\alpha t)A}$. Per quali altri α complessi vale la stessa conclusione?

2) Sia $A : D(A) \mapsto X$ settoriale. Dimostrare che se $x \in X$ è tale che esista $v = \lim_{t \to 0^+} A e^{tA} x$, allora $x \in D(A)$ e $v = Ax \in \overline{D(A)}$.

3) Dimostrare che se $A : D(A) \subset X \mapsto X$ e $B : D(B) \subset X \mapsto X$ sono operatori settoriali tali che $e^{tA} = e^{tB}$ per ogni $t > 0$, allora $D(A) = D(B)$ e $A = B$.

4) Provare che se $A : D(A) \subset X \mapsto X$ è settoriale con $\omega = 0$ e $\theta > 3\pi/4$ allora $-A^2$ è settoriale. Dimostrare che e^{tA} e e^{-sA^2} commutano per ogni t, $s > 0$.

5) Provare la (4.1.9).

6) Sia A settoriale, e sia x un autovettore di A con autovalore λ. Dimostrare che $e^{tA}x = e^{\lambda t}x$, per ogni $t \geq 0$ (cfr. esercizio 10, §3.1.3).

7) Sia $A : D(A) \mapsto X$ settoriale, e sia $B \in L(D(A), X)$ tale che esistono r, $C > 0$ per cui $\|Bx - Ax\| \leq r\|Ax\| + C\|x\|$ per ogni $x \in D(A)$. Dimostrare che se r è sufficientemente piccolo, allora anche B è settoriale. (Suggerimento: per $\lambda \in \rho(A)$ scrivere l'equazione $\lambda x - Bx = y$ come $x = R(\lambda, A)(Bx - Ax + y)$ e usare il teorema delle contrazioni).

Verificare che se r non è piccolo la tesi può essere falsa.

8) Dimostrare che se $A \in \mathcal{L}(X)$ allora A è settoriale, e si ha

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{t\lambda}R(\lambda, A)\, d\lambda, \quad t \in \mathbb{R},$$

essendo γ una qualunque curva semplice chiusa di classe C^1 a tratti che circonda $\sigma(A)$.

9) Dimostrare che se A è il generatore infinitesimale di un gruppo fortemente continuo allora A è settoriale se e solo se $A \in \mathcal{L}(X)$.

10) Sia $A : D(A) \mapsto X$ un operatore lineare il cui insieme risolvente contiene $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ ed esiste $M > 0$ tale che $\|R(\lambda, A)\| \leq M/|\mathrm{Re}\,\lambda|$ per $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$. Dimostrare che A^2 è settoriale.

11) (a) Siano $A : D(A) \mapsto X$, $B : D(B) \mapsto X$ operatori settoriali. Dimostrare che l'operatore $\mathcal{A} : D(A) \times D(B) \mapsto X \times X$ definito da $\mathcal{A}(u, v) = (Au, Bv)$ è settoriale in $X \times X$.

(b) Sia $A : D(A) \mapsto X$ settoriale. Dedurre da (a) che l'operatore $\mathcal{A} : D(A) \times X \mapsto X \times X$ definito da $\mathcal{A}(u, v) = (Au, v)$ è settoriale in $X \times X$. Mostrare che, in generale, l'operatore $\mathcal{B} : D(A) \times X \mapsto X \times X$ definito da $\mathcal{B}(u, v) = (v, Au)$ non è settoriale in $X \times X$.

12) Usando l'esercizio 4 e l'esercizio 10 dimostrare che i seguenti operatori sono settoriali.

(i) $A : C_b^2(\mathbb{R}) \mapsto C_b(\mathbb{R})$, $Af = f''$;

(ii) $A : W^{2,p}(\mathbb{R}) \mapsto L^p(\mathbb{R})$, $Af = f''$ $(1 \leq p < \infty)$;

(iii) $A : C_b^4(\mathbb{R}) \mapsto C_b(\mathbb{R})$, $Af = -f^{(iv)}$;

(iv) $A : \{f \in C^2(0, \pi) :\ f(0) = f(\pi),\, f'(0) = f'(\pi),\, f''(0) = f''(\pi)\} \mapsto \{f \in C(0, \pi) : f(0) = f(\pi)\}$, $Af = f''$.

13) Sia $m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ continua. Quali condizioni deve soddisfare m affinché l'operatore di moltiplicazione $A : D(A) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^n) :\ mf \in C_b(\mathbb{R}^n)\}$ sia settoriale in $C_b(\mathbb{R}^n)$? La risposta cambia se $\mathbb{R}^n$ è sostituito da un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$? La risposta cambia se $C_b(\mathbb{R}^n)$ è sostituito da $L^p(\mathbb{R}^n)$?

14) Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 4.1.7. Dimostrare che per Re $\lambda > \omega$ e per $|\beta| < \beta_0 = \arcsin(M_1 e)^{-1}$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt = \int_{r_\beta} e^{-\lambda z}T(z)dz$$

dove $r_\beta(\xi) = \xi e^{i\beta}$, $\xi \geq 0$, è la parametrizzazione canonica della semiretta uscente dall'origine con argomento β. (Questo fatto è stato usato nella dimostrazione del Teorema 4.1.7).

4.2 Esempi di operatori settoriali e non

Proposizione 4.2.1. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A : D(A) \subset H \mapsto H$ un operatore dissipativo e autoaggiunto. Allora A è settoriale, con $\theta < \pi$ qualunque e $\omega = 0$.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che per ogni operatore A autoaggiunto lo spettro di A è contenuto in $\mathbb{R}$. Se $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, per ogni $x \in D(A)$ si ha

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = (a^2 + b^2)\|x\|^2 - 2a\langle x, Ax\rangle + \|Ax\|^2 \geq b^2\|x\|^2, \tag{4.2.1}$$

cosicché se $b \neq 0$ $\lambda I - A$ è iniettivo. Proviamo che è anche surgettivo, verificando che l'immagine è chiusa e densa in H. Siano $x_n \in D(A)$ tali che $\lambda x_n - Ax_n$ converge. Dalla disuguaglianza

$$\|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\|^2 \geq b^2\|x_n - x_m\|^2, \ \ n, m \in \mathbb{N},$$

segue che la successione x_n è di Cauchy, e per differenza anche Ax_n lo è. Essendo H completo, x_n e Ax_n convergono; siano x, y i rispettivi limiti. Essendo A autoaggiunto, allora è chiuso (ricordiamo che ogni operatore aggiunto è chiuso) e quindi $x \in D(A)$, $Ax = y$, per cui $\lambda x_n - Ax_n$ converge a $\lambda x - Ax \in$ Range $(\lambda I - A)$. Quindi l'immagine di $\lambda I - A$ è chiusa.

Sia y ortogonale all'immagine di $(\lambda I - A)$, allora per ogni $x \in D(A)$ si ha $\langle y, \lambda x - Ax\rangle = 0$, quindi $y \in D(A^\star) = D(A)$ e $\overline{\lambda}y - A^\star y = \overline{\lambda}y - Ay = 0$, ed essendo $\overline{\lambda}I - A$ iniettivo ne segue $y = 0$. Quindi l'immagine di $(\lambda I - A)$ è densa.

Dal fatto che A è dissipativo segue che lo spettro di A è contenuto in $(-\infty, 0]$. Infatti se $\lambda > 0$ per ogni $x \in D(A)$ si ha, in luogo della (4.2.1),

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\langle x, Ax\rangle + \|Ax\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2, \tag{4.2.2}$$

e ragionando come sopra si ottiene che $\lambda \in \rho(A)$.

Troviamo ora la maggiorazione di $\|R(\lambda, A)\|$ per $\lambda = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$, $-\pi < \theta < \pi$. Dato $x \in H$, sia $u = R(\lambda, A)x$. Dall'uguaglianza $\lambda u - Au = x$ segue, moltiplicando per $e^{-i\theta/2}$ e poi moltiplicando scalarmente per u,

$$\rho e^{i\theta/2}\|u\|^2 - e^{-i\theta/2}\langle Au, u\rangle = e^{-i\theta/2}\langle x, u\rangle,$$

da cui, prendendo la parte reale,

$$\rho\cos(\theta/2)\|u\|^2 - \cos(\theta/2)\langle Au, u\rangle = \mathrm{Re}(e^{-i\theta/2}\langle x, u\rangle) \leq \|x\|\,\|u\|$$

e quindi, essendo $\cos(\theta/2) > 0$,

$$\|u\| \leq \frac{\|x\|}{|\lambda|\cos(\theta/2)},$$

con $\theta = \arg\lambda$. ■

Consideriamo la realizzazione del Laplaciano Δ in $L^2(\Omega)$, essendo Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2 (cfr. §2.3):

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad Af = \Delta f.$$

Dalla proposizione 4.2.1 discende il seguente:

Corollario 4.2.2. *L'operatore A definito sopra è settoriale, con $\theta < \pi$ qualunque e $\omega = 0$.*

Vediamo ora esempi di realizzazioni di operatori differenziali in vari spazi di Banach (non necessariamente di Hilbert) che sono settoriali, e altri che non lo sono. Cominciamo col caso unidimensionale, nel quale si fanno tutti i calcoli in modo elementare.

4.2.1 Esempi in dimensione 1

Alcuni esempi si trovano nell'esercizio 12, §4.1.1. Ora arricchiamo la casistica.

Nel prossimo esempio vediamo un modo diretto, che non fa uso dell'esercizio 12, per provare che la realizzazione della derivata seconda è settoriale in vari spazi funzionali.

Esempio 4.2.3. (cfr. esempio 3.2.9) Sia $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, e sia

$$D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}), \quad Af = f''.$$

Lo spettro di A è la semiretta $(-\infty, 0]$ e per $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ si ha

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{|\lambda| \cos\theta/2},$$

essendo $\theta = \arg \lambda$. Quindi A è settoriale in X. Lo stesso vale se $X = BUC(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni uniformemente continue e limitate su $\mathbb{R}$), e se $X = C_b(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$).

Notiamo che in quest'ultimo caso il dominio della realizzazione della derivata seconda è $C_b^2(\mathbb{R})$ che non è denso in X. Otteniamo cosí un primo esempio di semigruppo analitico non fortemente continuo.

Nel prossimo esempio useremo il seguente lemma.

Lemma 4.2.4. *Se $K : [0,T]^2 \mapsto \mathbb{C}$ è una funzione continua e simmetrica, per ogni $p \in [1, \infty]$ si ha*

$$\left\| \int_0^T K(\cdot, y) f(y) dy \right\|_{L^p} \le \sup_{0 \le x \le T} \int_0^T |K(x,y)| dy \, \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p(0,T).$$

La dimostrazione del lemma è semplice per $p = 1$ e per $p = +\infty$. Infatti per $p = 1$,

$$\int_0^T \left| \int_0^T K(x,y) f(y) dy \right| dx \le \int_0^T |f(y)| \left(\int_0^T |K(y,x)| dx \right) dy$$

$$\le \int_0^T |f(y)| \sup_{0 \le \xi \le T} \int_0^T |K(\xi, x)| dx$$

e per $p=\infty$ si ha, per ogni $x\in(0,T)$,

$$\Big|\int_0^T K(x,y)f(y)dy\Big| \le \|f\|_\infty \sup_{0\le x\le T}\int_0^T |K(x,y)|dy.$$

Per $p\in(1,\infty)$ la tesi segue per interpolazione, ricordando che se $T\in\mathcal{L}(L^1(\Omega))\cap\mathcal{L}(L^\infty(\Omega))$ con (Ω,μ) spazio di misura sigma-finito, allora $T\in\mathcal{L}(L^p(\Omega))$ per ogni $p\in(1,+\infty)$ e si ha $\|T\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}\le \|T\|^{1/p}_{\mathcal{L}(L^1(\Omega))}\|T\|^{1-1/p}_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega))}$. Non sono riuscita a trovare una dimostrazione diretta, che non faccia uso della teoria dell'interpolazione.

Esempio 4.2.5. (cfr. esempio 3.2.10) Sia $1\le p\le\infty$, $X=L^p(0,\pi)$ e sia A definito da

$$D(A)=\{f\in W^{2,p}(0,\pi)\cap W^{1,p}_0(0,\pi)\},\quad Af=f''.$$

Allora $\sigma(A)=\{-n^2;\ n\in\mathbb{N}\}$, e per $\lambda\ne -n^2$ si ha

$$\begin{cases} R(\lambda,A)f(x)=\dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)}\displaystyle\int_x^\pi \sinh[\sqrt{\lambda}(\pi-y)]f(y)dy+ \\ \\ +\dfrac{\sinh[\sqrt{\lambda}(\pi-x)]}{\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)}\displaystyle\int_0^x \sinh(\sqrt{\lambda}y)f(y)dy. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

ossia

$$R(\lambda,A)f(x)=\int_0^\pi K_\lambda(x,y)f(y)dy,$$

dove

$$K_\lambda(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda}(\pi-x))\sinh(\sqrt{\lambda}y)}{\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)}, & 0\le y\le x, \\ \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda}x)\sinh(\sqrt{\lambda}(\pi-y))}{\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)}, & x<y\le\pi. \end{cases}$$

Dal Lemma 4.2.4 segue allora

$$\|R(\lambda,A)\|_{L(L^p)}\le \sup_{0\le x\le\pi}\int_0^\pi |K_\lambda(x,y)|dy.$$

Essendo

$$|K_\lambda(x,y)|\le \begin{cases} \dfrac{\cosh(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}(\pi-x))\cosh(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}y)}{|\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)|}, & 0\le y\le x, \\ \\ \dfrac{\cosh(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}(\pi-y))\cosh(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}x)}{|\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)|}, & x\le y\le\pi, \end{cases}$$

si ottiene
$$\int_0^\pi |K_\lambda(x,y)|dy \le \frac{\cosh(\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}(\pi-x))}{|\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)|}\int_0^x \cosh(\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}y)dy$$

$$+\frac{\cosh(\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}x)}{|\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)|}\int_x^\pi \cosh(\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}(\pi-y))dy$$

$$=\frac{\sinh(\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}\pi)}{|\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)|\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}} \le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{|\lambda|\cos(\theta/2)},$$

con $\theta = \arg\lambda$.

La stessa conclusione vale se
$$X = C([0,\pi])$$
$$D(A) = \{u \in C^2([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\},\ \ Au = u''.$$
In questo caso (come nel caso $X = L^\infty$) il dominio di A non è denso, e si ha
$$\overline{D(A)} = \{u \in C([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}. \tag{4.2.4}$$

Usiamo questo risultato per studiare l'equazione del calore lineare omogenea (3.2.9), dove u_0 è una funzione continua in $[0,\pi]$ soddisfacente la condizione di compatibilità
$$u_0(0) = u_0(\pi) = 0.$$
Scegliamo $X = C([0,\pi])$. Sappiamo che, essendo $u_0 \in \overline{D(A)}$, la funzione $t \mapsto e^{tA}u_0$ è analitica per $t > 0$ e continua fino in 0 con valori in X, è continua con valori in $D(A^n)$ per ogni n per $t > 0$, e soddisfa (4.1.8). Posto allora
$$u(t,x) = (e^{tA}u_0)(x),\ \ t \ge 0,\ x \in [0,\pi],$$
la funzione u è analitica rispetto a t e di classe C^∞ rispetto alla coppia (t,x) in $(0,+\infty)\times[0,\pi]$, è continua in $[0,+\infty)\times[0,\pi]$, ed è l'unica soluzione regolare di (3.2.9).

Diamo ora una dimostrazione alternativa, che non fa uso del Lemma 4.2.4. Consideriamo per semplicità l'intervallo $(0,1)$ invece di $(0,\pi)$, e la realizzazione della derivata seconda in $L^p(0,1)$, $1 \le p < +\infty$,
$$D(A_p) = \{u \in W^{2,p}(0,1) :\ u(0) = u(1) = 0\} \subset L^p(0,1),\ \ A_p u = u'',$$
oppure in $C([0,1])$,
$$D(A_\infty) = \{u \in C^2([0,1]) :\ u(0) = u(1) = 0\},\ \ A_\infty u = u''.$$

Proposizione 4.2.6. *Gli operatori $A_p : D(A_p) \mapsto L^p(0,1)$, $1 \le p < +\infty$ e $A_\infty : D(A_\infty) \mapsto C([0,1])$ sono settoriali, con $\omega = 0$ e ogni $\theta \in (\pi/2,\pi)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ con $|\theta| \le \theta_0 < \pi$. Poniamo $\mu = \sqrt{\lambda}$, cosicché $\mathrm{Re}\,\mu > 0$. Per ogni $f \in X$, $X = L^p(0,1)$ o $X = C([0,1])$, estendiamo f a una funzione $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ o $\widetilde{f} \in C_b(\mathbb{R})$, in modo tale che $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$. Per esempio possiamo prendere $\widetilde{f}(x) = 0$ per $x \notin (0,1)$ se $X = L^p(0,1)$, $\widetilde{f}(x) = f(1)$ per $x > 1$, $\widetilde{f}(x) = f(0)$ per $x < 0$ se $X = C([0,1])$. Poniamo

$$\widetilde{u}(x) = \frac{1}{2\mu}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\mu(x-y)}\widetilde{f}(y)dy + \int_{x}^{+\infty} e^{\mu(x-y)}\widetilde{f}(y)dy\right) = (f \star h_\mu)(x),$$

essendo $h_\mu(x) = \frac{1}{2\mu}e^{-\mu|x|}$. Sappiamo già che $u = \widetilde{u}_{|[0,1]}$ è una soluzione di $\lambda u - u'' = f$ e che $\|u\|_p \le \frac{\|f\|_p}{|\lambda|\cos(\theta/2)}$, con $\theta = \arg(\lambda)$. Ma non è detto che u soddisfi le condizioni al bordo. Poniamo

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\mu}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mu|s|}\widetilde{f}(s)\; ds = \widetilde{u}(0)$$

e

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\mu}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mu|1-s|}\widetilde{f}(s)\; ds = \widetilde{u}(1).$$

Tutte le soluzioni di $\lambda u - u'' = f$ appartenenti a $W^{2,p}(0,1)$ o a $C^2([0,1])$ sono date da $u(x) = \widetilde{u}(x) + c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, dove $u_1(x) = e^{-\mu x}$ e $u_2(x) = e^{\mu x}$ sono due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea $\lambda u - u'' = 0$. Troviamo c_1 e c_2 imponendo $u(0) = u(1) = 0$; questo si può fare perché il determinante

$$D(\mu) = e^{\mu} - e^{-\mu}$$

non si annulla, essendo $\mathrm{Re}\,\mu > 0$. Si ottiene

$$c_1 = \frac{1}{D(\mu)}\left[\gamma_1 - e^{\mu}\gamma_0\right], \qquad c_2 = \frac{1}{D(\mu)}\left[-\gamma_1 + e^{-\mu}\gamma_0\right].$$

Calcoliamo esplicitamente, per $1 \le p < +\infty$

$$\|u_1\|_p \le \frac{1}{(p\mathrm{Re}\,\mu)^{1/p}}; \qquad \|u_2\|_p \le \frac{e^{\mathrm{Re}\,\mu}}{(p\mathrm{Re}\,\mu)^{1/p}};$$

mentre $\|u_1\|_\infty = 1$, $\|u_2\|_\infty = e^{\mathrm{Re}\,\mu}$. Per $1 < p < +\infty$ usando la disuguaglianza di Hölder otteniamo anche

$$|\gamma_0| \le \frac{1}{2|\mu|(p'\mathrm{Re}\,\mu)^{1/p'}}\|f\|_p, \qquad |\gamma_1| \le \frac{1}{2|\mu|(p'\mathrm{Re}\,\mu)^{1/p'}}\|f\|_p$$

e

$$|\gamma_0|,\; |\gamma_1| \le \frac{1}{2|\mu|}\|f\|_1, \quad \text{se } f \in L^1(0,1),$$

$$|\gamma_0|,\; |\gamma_1| \le \frac{1}{|\mu|\mathrm{Re}\,\mu}\|f\|_\infty, \quad \text{se } f \in C([0,1]).$$

Inoltre $|D(\mu)| \approx e^{\mathrm{Re}\,\mu}$ per $|\mu| \to \infty$. Infatti, essendo $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ con $|\theta| \le \theta_0 < \pi$ allora $\mu = \sqrt{|\lambda|}e^{i\theta/2}$ per cui $\mathrm{Re}\,\mu = |\mu|\cos(\theta/2) \ge |\mu|\cos(\theta_0/2)$ e $|D(\mu)| = |e^{\mu}||(1-e^{-2\mu})| = e^{\mathrm{Re}\,\mu}|(1-e^{-2\mathrm{Re}\mu}e^{-2i\mathrm{Im}\mu}))|$. Otteniamo quindi

$$\|c_1u_1\|_p \le \frac{C}{|\lambda|}\|f\|_p \qquad \text{e} \qquad \|c_2u_2\|_p \le \frac{C}{|\lambda|}\|f\|_p$$

per qualche $C > 0$ e $|\lambda|$ grande. Sommando, otteniamo

$$\|u\|_p \le \frac{C}{|\lambda|}\|f\|_p$$

per $|\lambda|$ grande, diciamo $|\lambda| \ge R$, e $|\arg\,\lambda| \le \theta_0$. La maggiorazione della norma del risolvente per $|\lambda| \ge R$ è sufficiente per concludere, infatti per $|\lambda| \le R$ possiamo ragionare come segue: lo spettro di A_p consiste solo degli autovalori $-n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$. Dato che $\lambda \mapsto \lambda R(\lambda, A_p)$ è olomorfa nell'insieme risolvente, è anche continua e quindi la sua norma è limitata nel compatto $\{|\lambda| \le R,\ |\arg\,\lambda| \le \theta_0\} \cup \{0\}$. ■

Esempio 4.2.7. Sia $0 < \alpha < 1$, e poniamo

$$\begin{cases} A : D(A) = \{u \in C^{2+\alpha}([0,\pi]) :\ u(0) = u(\pi) = 0\} \mapsto C^{\alpha}([0,\pi]), \\ \\ Au = u''. \end{cases}$$

Ricordiamo che $C^{\alpha}([0,\pi])$ è lo spazio delle funzioni Hölderiane di esponente α in $[0,\pi]$, dotato della norma

$$\|u\|_{C^\alpha} = \|u\|_\infty + [u]_{C^\alpha} = \|u\|_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

mentre $C^{2+\alpha}([0,\pi])$ è lo spazio delle funzioni derivabili due volte, tali che la derivata seconda è Hölderiana di esponente α in $[0,\pi]$.

L'insieme risolvente di A contiene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Infatti per ogni $f \in C^{\alpha}([0,\pi])$ e $\lambda \notin (-\infty,0]$ l'equazione $\lambda u - u'' = f$ ha un'unica soluzione $u \in C^2([0,\pi])$ che si annulla in 0 e in 1, inoltre $\|u\|_\infty \le C(\lambda)\|f\|_\infty$ (Esempio 4.2.5). Dato che $u \in C^2([0,\pi])$ allora $u \in C^\alpha([0,\pi])$, e per differenza $u'' \in C^\alpha([0,\pi])$. Quindi $u \in D(A)$. Inoltre $\|u\|_{C^\alpha} \le C\|u\|_{C^2} \le C'(\lambda)\|f\|_\infty \le C'(\lambda)\|f\|_{C^\alpha}$. Quindi $\lambda \in \rho(A)$.

Ma l'operatore A non è settoriale in $C^\alpha([0,\pi])$. Infatti, per $f \equiv 1$ e $\lambda > 0$, la formula (4.2.3) dà

$$[R(\lambda, A)f](x) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\sinh(\sqrt{\lambda}x) + \sinh(\sqrt{\lambda}(\pi - x))}{\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)}\right).$$

Per $\lambda > \pi^{-2}$ poniamo $u = R(\lambda, A)f$. Allora

$$\lambda[u]_{C^\alpha} \ge \lambda\frac{u(\lambda^{-1/2})}{\lambda^{-\alpha/2}} = \frac{\lambda^{\alpha/2}}{e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}}\left(e^{\sqrt{\lambda}\pi}(1-e^{-1}) + e^{-\sqrt{\lambda}\pi}(e-1) - e + e^{-1}\right),$$

che non è limitato per $\lambda \to +\infty$.

Esempio 4.2.8. Il semigruppo delle traslazioni $T(t)f = f(t+\cdot)$ (vedi esempio 3.2.7) non è analitico in nessuno degli spazi $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, e nemmeno in $BUC(\mathbb{R})$. Infatti lo spettro del suo generatore è la retta $i\mathbb{R}$ e quindi l'insieme risolvente non può contenere un settore con angolo $\theta > \pi/2$.

4.3 Esempi in dimensione $n \ge 1$

Il primo esempio importante di un operatore settoriale è la realizzazione del Laplaciano in vari spazi di funzioni definite su $\mathbb{R}^n$. Le dimostrazioni sono rimandate agli esercizi della sezione 4.3.1.

Ora consideriamo un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2. Abbiamo visto nel Corollario 4.2.2 che la realizzazione del Laplaciano in $L^2(\Omega)$ con condizione al bordo di Dirichlet è un operatore settoriale. Lo stesso vale se $L^2(\Omega)$ è sostituito da $L^p(\Omega)$, $p \ge 1$, ma la dimostrazione è notevolmente piú complicata. La stima del risolvente invece si fa in modo elementare, almeno per $p \ge 2$, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 4.3.1. *Siano $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re\,\lambda \ge 0$, tali che $\lambda u - \Delta u = f \in L^p(\Omega)$. Allora*

$$\|u\|_{L^p} \le C_p \frac{\|f\|_{L^p}}{|\lambda|},$$

con $C_p = (1 + p^2/4)^{1/2}$.

Dimostrazione. Se $u = 0$ la tesi è ovvia. Se $u \ne 0$, moltiplichiamo ambo i membri dell'uguaglianza $\lambda u - \Delta u = f$ per $|u|^{p-2}\overline{u}$, che appartiene a $L^{p'}(\Omega)$, e integriamo su Ω. Si ottiene

$$\lambda\|u\|^p + \int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(|u|^{p-2}\overline{u}\Big)dx = \int_\Omega f\,|u|^{p-2}\overline{u}\,dx.$$

Scrivendo $|u|^{p-2} = |u|^{p-4}u\overline{u}$, osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_k}|u|^{p-2}\overline{u} = |u|^{p-2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}(p-2)\overline{u}|u|^{p-4}\Big(\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x_k} + u\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k}\Big).$$

Posto

$$|u|^{\frac{p-4}{2}}\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = a_k + ib_k$$

con a_k, $b_k \in \mathbb{R}$, si avrà dunque

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(|u|^{p-2}\overline{u}\Big)dx \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^n \bigg((|u|^{\frac{p-4}{2}})^2 u\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} + \frac{p-2}{2}(|u|^{\frac{p-4}{2}})^2\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big(\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x_k} + u\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k}\Big)\bigg)dx \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^n \Big(a_k^2 + b_k^2 + (p-2)a_k(a_k + ib_k)\Big)dx,
\end{aligned}$$

per cui

$$\lambda\|u\|^p + \int_\Omega \sum_{k=1}^n ((p-1)a_k^2 + b_k^2)dx + i(p-2)\int_\Omega \sum_{k=1}^n a_k b_k\, dx = \int_\Omega f|u|^{p-2}\overline{u}\, dx.$$

Prendendo la parte reale e maggiorando si ottiene

$$\mathrm{Re}\,\lambda\|u\|^p + \int_\Omega \sum_{k=1}^n ((p-1)a_k^2 + b_k^2)dx = \mathrm{Re}\int_\Omega f|u|^{p-2}\overline{u}\, dx \le \|f\|\,\|u\|^{p-1},$$

per cui

$$\begin{cases} (a) \quad \mathrm{Re}\,\lambda\|u\| \le \|f\|. \\ (b) \quad \displaystyle\int_\Omega \sum_{k=1}^n ((p-1)a_k^2 + b_k^2)dx \le \|f\|\,\|u\|^{p-1}. \end{cases}$$

Prendendo la parte immaginaria si ottiene

$$\mathrm{Im}\,\lambda\,\|u\|^p + (p-2)\int_\Omega \sum_{k=1}^n a_k b_k\, dx = \mathrm{Im}\int_\Omega f|u|^{p-2}\overline{u}\, dx$$

per cui

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|\,\|u\|^p \le \frac{p-2}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)dx + \|f\|\,\|u\|^{p-1},$$

e utilizzando la (b),

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|\,\|u\|^p \le \left(\frac{p-2}{2} + 1\right)\|f\|\,\|u\|^{p-1},$$

ossia

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|\,\|u\| \le \frac{p}{2}\|f\|.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (a), elevando al quadrato e sommando, si ottiene

$$|\lambda|^2\|u\|^2 \le \left(1 + \frac{p^2}{4}\right)\|f\|^2,$$

e la tesi segue. ■

La proposizione 4.3.1 è il primo passo per dimostrare che la realizzazione del Laplaciano con condizione al bordo di Dirichlet in $L^p(\Omega)$, ossia l'operatore

$$A_p : D(A_p) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto L^p(\Omega),$$

$$A_p u = \Delta u,$$

è settoriale. La dimostrazione del fatto che l'insieme risolvente di A_p contiene un semipiano destro (anzi contiene tutto $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0)$) segue dall'analogo risultato per $p=2$ e dal teorema di regolarità 2.3.3.

Consideriamo ora le realizzazioni di vari altri operatori differenziali, non necessariamente in spazi di Hilbert.

Sia $\Omega=\mathbb{R}^n$, oppure $\Omega=$ aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2. In questo caso indichiamo con $\nu(x)$ il versore esterno a $\partial\Omega$ nel punto $x\in\partial\Omega$.

Consideriamo un operatore differenziale

$$(\mathcal{A}u)(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)D_{ij}u(x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)D_iu(x)+c(x)u(x) \tag{4.3.1}$$

con coefficienti a_{ij}, b_i, c reali, uniformemente continui e limitati su $\overline{\Omega}$.

Supponiamo che per ogni x la matrice $[a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$ sia simmetrica, e che soddisfi la condizione di ellitticità uniforme

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq c|\xi|^2,\ \ x\in\overline{\Omega},\ \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{4.3.2}$$

per qualche $c>0$.

Valgono allora i seguenti risultati.

Teorema 4.3.2. (S. Agmon, [1])

(i) *Siano $p\in(1,\infty)$, $\Omega=\mathbb{R}^n$, e sia $A_p:W^{2,p}(\mathbb{R}^n)\mapsto L^p(\mathbb{R}^n)$ definito da $(A_pu)(x)=(\mathcal{A}u)(x)$. L'operatore A_p è settoriale in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Sia Ω un aperto limitato con frontiera di classe C^2, sia $p\in(1,\infty)$ e sia A_p la realizzazione di $\mathcal{A}$ in $L^p(\Omega)$ con condizione al bordo di Dirichlet:*

$$D(A_p)=W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega),\ \ (A_pu)(x)=(\mathcal{A}u)(x).$$

L'operatore A_p è settoriale in $L^p(\Omega)$, e $D(A_p)$ è denso in $L^p(\Omega)$.

Teorema 4.3.3. (H. B. Stewart, [11, 12])

(i) *Sia $\Omega=\mathbb{R}^n$, e sia $A:D(A)\mapsto X=C_b(\mathbb{R}^n)$ definito da*

$$\begin{cases} D(A)=\{u\in C_b(\mathbb{R}^n)\cap_{p\geq 1}W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n):\,\mathcal{A}u\in C_b(\mathbb{R}^n)\},\\ \\ (Au)(x)=(\mathcal{A}u)(x),\ \ u\in D(A).\end{cases} \tag{4.3.3}$$

L'operatore A è settoriale in X, e si ha $\overline{D(A)}=BUC(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *Sia Ω un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2, e sia A la realizzazione di $\mathcal{A}$ in $X = C(\overline{\Omega})$ con condizione al bordo di Dirichlet:*

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in \cap_{p\geq 1} W^{2,p}(\Omega) :\, u_{|\partial\Omega} = 0,\ \mathcal{A}u \in C(\overline{\Omega})\}, \\ \\ (Au)(x) = (\mathcal{A}u)(x), \ \ u \in D(A). \end{cases} \tag{4.3.4}$$

L'operatore A è settoriale in X, e si ha $\overline{D(A)} = C_0(\overline{\Omega})$ = lo spazio delle funzioni continue su $\overline{\Omega}$ che si annullano sulla frontiera.

(iii) *Sia Ω un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2, e sia A la realizzazione di $\mathcal{A}$ in $X = C(\overline{\Omega})$ con condizione al bordo di ordine 1:*

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in \cap_{p\geq 1} W^{2,p}(\Omega) :\, \mathcal{B}u_{|\partial\Omega} = 0,\ \mathcal{A}u \in C(\overline{\Omega})\}, \\ \\ (Au)(x) = (\mathcal{A}u)(x), \ \ u \in D(A), \end{cases} \tag{4.3.5}$$

essendo

$$\mathcal{B}u = b_0(x)u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i u(x)$$

dove i coefficienti b_i, $i = 1, \ldots, n$ sono di classe C^1 e vale la condizione di non tangenzialità

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\nu_i(x) \neq 0, \ \ x \in \partial\Omega.$$

L'operatore A è settoriale in X, e $D(A)$ è denso in X.

Inoltre in tutti e tre i casi considerati esiste $M > 0$ tale che per λ in $S_{\theta,\omega}$ si ha

$$\|D_i R(\lambda, A)f\|_\infty \leq \frac{M}{|\lambda|^{1/2}}\|f\|_\infty, \ \ \forall f \in X,\ i = 1, \ldots, n. \tag{4.3.6}$$

4.3.1 Esercizi

In questa sezione studiamo le realizzazioni del semigruppo di Gauss–Weierstrass in alcuni spazi funzionali, sotto forma di esercizi guidati. Sia $T(t)$ definito da (3.1.9).

1) Usando la trasformata di Fourier, mostrare che lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni C^∞ a decrescenza rapida è invariante per $T(t)$, e che $T(t)T(s)f = T(t+s)f$, per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (e quindi, per densità, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$). Provare che se f_n, $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ e $f_n \to f$ puntualmente, $\|f_n\|_\infty \leq C$ indipendente da n, allora $T(t)f_n \to T(t)f$ puntualmente, per ogni $t > 0$. Usare questo fatto per provare che $T(t)T(s)f = T(t+s)f$, per ogni $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$.

2) Mostrare che $T(t)$ è fortemente continuo in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$.

3) Usando il Teorema 4.1.7 dimostrare che negli spazi $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $X = C_b(\mathbb{R}^n)$, $X = BUC(\mathbb{R}^n)$, $T(t)$ è il semigruppo analitico generato da un operatore settoriale. (Per $X = C_b(\mathbb{R}^n)$, $T(t)$ non è fortemente continuo ma la funzione $t \mapsto T(t)f(x)$ è continua in $[0, +\infty)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e questo basta per la parte (b) del Teorema 4.1.7).

4) Se $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, provare che il Laplaciano con dominio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è chiudibile e la sua chiusura è il generatore infinitesimale A_p di $T(t)$ in X. Se $X = BUC(\mathbb{R}^n)$, provare che il Laplaciano con dominio $BUC^2(\mathbb{R}^n)$ è chiudibile e la sua chiusura è il generatore infinitesimale di $T(t)$ in X. (Usare il lemma 3.1.12, scegliendo $D = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e poi $D = BUC^2(\mathbb{R}^n)$).

5) Se $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, provare che il dominio di A_2 è uguale a $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$. Suggerimento: per l'esercizio 4, basta dimostrare che in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la norma del grafico è equivalente alla norma $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

4.4 Gli spazi di interpolazione $D_A(\theta, \infty)$

Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore settoriale. In tutta questa sezione poniamo

$$M_0 = \sup_{0<t\le 1} \|e^{tA}\|, \;\; M_1 = \sup_{0<t\le 1} \|tAe^{tA}\|.$$

Abbiamo visto che per ogni $x \in \overline{D(A)}$ la funzione $t \mapsto u(t) = e^{tA}x$ appartiene a $C([0,T]; X)$, e per ogni $x \in D(A)$ tale che $Ax \in \overline{D(A)}$, essa appartiene a $C^1([0,T]; X)$. Una domanda naturale a questo punto è la seguente: quali sono i dati iniziali per cui u ha una regolarità intermedia, per esempio è α-Hölderiana? Analogamente, sappiamo che per $x \in X$ la funzione $t \mapsto v(t) = \|Ae^{tA}x\|$ ha in generale una singolarità di ordine 1 per $t \to 0$, mentre per $x \in D(A)$ essa è limitata per t vicino a 0. Quali sono gli x per cui v ha una singolarità di ordine α, con $0 < \alpha < 1$?

Per rispondere a queste domande introduciamo degli spazi di Banach intermedi fra X e $D(A)$, definiti come segue.

Definizione 4.4.1. *Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore settoriale, e sia $0 < \alpha < 1$. Poniamo*

$$\begin{cases} D_A(\alpha, \infty) = \{x \in X : \; [x]_\alpha = \sup_{0<t\le 1} \|t^{1-\alpha}Ae^{tA}x\| < \infty\}, \\ \\ \|x\|_{D_A(\alpha,\infty)} = \|x\| + [x]_\alpha. \end{cases}$$

Segue immediatamente dalla definizione che se $x \in D_A(\alpha, \infty)$ e $T > 0$, la funzione $s \mapsto \|Ae^{sA}x\|$ appartiene a $L^1(0, T)$, cosicché

$$e^{tA}x - x = \int_0^t Ae^{sA}x ds \;\; \forall t \ge 0, \;\; x = \lim_{t\to 0} e^{tA}x.$$

In particolare, tutti gli spazi $D_A(\alpha, \infty)$ sono contenuti nella chiusura di $D(A)$. Inoltre si ha

$$D_A(\alpha, \infty) = D_{A_0}(\alpha, \infty),$$

dove A_0 è la parte di A in $\overline{D(A)}$.

Proposizione 4.4.2. *Per* $0 < \alpha < 1$ *si ha*

$$D_A(\alpha,\infty) = \{x \in X :\ [[x]]_{D_A(\alpha,\infty)} = \sup_{0<t\leq 1} t^{-\alpha}\|e^{tA}x - x\| < \infty\},$$

e la norma

$$x \mapsto \|x\| + [[x]]_{D_A(\alpha,\infty)}$$

è equivalente alla norma di $D_A(\alpha,\infty)$.

Dimostrazione. Sia $x \in D_A(\alpha,\infty)$. Per $0 < t \leq 1$ si ha

$$t^{-\alpha}(e^{tA}x - x) = t^{-\alpha}\int_0^t s^{1-\alpha}Ae^{sA}x\frac{1}{s^{1-\alpha}}ds, \tag{4.4.1}$$

cosicché

$$[[x]]_{D_A(\alpha,\infty)} = \|t^{-\alpha}(e^{tA}x - x)\|_{L^\infty(0,1)} \leq \alpha^{-1}[x]_{D_A(\alpha,\infty)}, \tag{4.4.2}$$

Viceversa, sia $[[x]]_{D_A(\alpha,\infty)} < \infty$. Scriviamo $Ae^{tA}x$ come

$$Ae^{tA}x = Ae^{tA}\frac{1}{t}\int_0^t (x - e^{sA}x)ds + e^{tA}\frac{1}{t}A\int_0^t e^{sA}xds.$$

Ne segue che

$$\|t^{1-\alpha}Ae^{tA}x\| \leq t^{1-\alpha}\frac{M_1}{t^2}\int_0^t s^\alpha\frac{\|x - e^{sA}x\|}{s^\alpha}ds + M_0t^{-\alpha}\|e^{tA}x - x\|, \tag{4.4.3}$$

e la funzione $s \mapsto \|x - e^{sA}x\|/s^\alpha$ è limitata, cosicché $t \mapsto t^{1-\alpha}Ae^{tA}x$ è limitata, e

$$\|t^{1-\alpha}Ae^{tA}x\|_{L^\infty(0,1)} = [x]_{D_A(\alpha,\infty)} \leq (M_1(\alpha+1)^{-1} + M_0)[[x]]_{D_A(\alpha,\infty)} \tag{4.4.4}$$

Quindi, le seminorme $[\,\cdot\,]_{D_A(\alpha,\infty)}$ e $[[\,\cdot\,]]_{D_A(\alpha,\infty)}$ sono equivalenti. ■

Ricordando la proprietà di semigruppo di e^{tA} si ottiene il seguente importante corollario.

Corollario 4.4.3. *Dato* $x \in X$, *la funzione* $t \mapsto e^{tA}x$ *appartiene a* $C^\alpha([0,1];X)$ *se e solo se* $x \in D_A(\alpha,\infty)$. *In questo caso,* $t \mapsto e^{tA}x \in C^\alpha([0,T];X)$ *per ogni* $T > 0$.

Gli spazi $D_A(\alpha,\infty)$ sono spazi di Banach (la dimostrazione è facile ed è lasciata per esercizio). Si può inoltre dimostrare che non dipendono esplicitamente dall'operatore A, ma solo da $D(A)$ e dalla norma del grafico di A: cioè, per ogni operatore settoriale $B : D(B) \mapsto X$ tale che $D(B) = D(A)$, con norme del grafico equivalenti, si ha $D_A(\alpha,\infty) = D_B(\alpha,\infty)$, con equivalenza delle rispettive norme.

Un aspetto importante degli spazi $D_A(\alpha,\infty)$ è che la parte di A in $D_A(\alpha,\infty)$, definita da

$$\begin{cases} D(A_\alpha) = D_A(\alpha+1,\infty) = \{x \in D(A) :\ Ax \in D_A(\alpha,\infty)\}, \\ \\ A_\alpha : D_A(\alpha+1,\infty) \mapsto D_A(\alpha,\infty),\ \ A_\alpha x = Ax, \end{cases}$$

è un operatore settoriale, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 4.4.4. *Per $0 < \alpha < 1$ l'insieme risolvente di A_α contiene $\rho(A)$, e si ha $\|R(\lambda, A_\alpha)\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty))} \le \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ per ogni $\lambda \in \rho(A)$. In particolare, A_α è un operatore settoriale in $D_A(\alpha, \infty)$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(A)$. Si vede subito che $\lambda I - A : D_A(\alpha+1, \infty) \mapsto D_A(\alpha, \infty)$ è invertibile. Inoltre, per ogni $x \in D_A(\alpha, \infty)$ e $0 < t \le 1$ vale

$$\|t^{1-\alpha} A e^{tA} R(\lambda, A)x\| = \|R(\lambda, A) t^{1-\alpha} A e^{tA} x\| \le \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \|t^{1-\alpha} A e^{tA} x\|.$$

Quindi,

$$[R(\lambda, A)x]_{D_A(\alpha,\infty)} \le \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} [x]_{D_A(\alpha,\infty)},$$

da cui segue la tesi. ■

Segue inoltre dal corollario 4.4.3 che la funzione $t \mapsto e^{tA}x$ appartiene a $C^{1+\alpha}([0,1]; X)$ (e quindi a $C^{1+\alpha}([0,T]; X)$ per ogni $T > 0$) se e solo se $x \in D_A(\alpha+1, \infty)$.

Un'altra proprietà degli spazi $D_A(\alpha, \infty)$ è descritta dalla seguente proposizione.

Proposizione 4.4.5. *Per ogni $x \in D(A)$ si ha*

$$[x]_{D_A(\alpha,\infty)} \le M_0^\alpha M_1^{1-\alpha} \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}.$$

Dimostrazione. Per ogni $t \in (0,1)$ si ha

$$\|t^{1-\alpha} A e^{tA} x\| \le \begin{cases} M_0 t^{1-\alpha} \|Ax\|, \\ \\ M_1 t^{-\alpha} \|x\|. \end{cases}$$

Ne segue

$$\|t^{1-\alpha} A e^{tA} x\| \le (M_0 t^{1-\alpha} \|Ax\|)^\alpha (M_1 t^{-\alpha} \|x\|)^{1-\alpha} = M_0^\alpha M_1^{1-\alpha} \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}.$$

■

Dati tre spazi normati $Z \subset Y \subset X$ con immersioni continue, e dato $\alpha \in (0,1)$, si dice che Y è di classe J_α fra X e Z se esiste $C > 0$ tale che

$$\|y\|_Y \le C \|y\|_Z^\alpha \|y\|_X^{1-\alpha}, \quad \forall y \in Z.$$

Dalla proposizione 4.4.5 segue allora che per ogni $\alpha \in (0,1)$ lo spazio $D_A(\alpha, \infty)$ è di classe J_α fra X e il dominio di A.

Esempio 4.4.6. Riprendiamo l'esempio 4.2.3, dimostrando che se $X = C_b(\mathbb{R})$, $D(A) = C_b^2(\mathbb{R})$, $Au = u''$, per $0 < \alpha < 1$, $\alpha \ne 1/2$, si ha

$$D_A(\alpha, \infty) = C_b^{2\alpha}(\mathbb{R}),$$

con equivalenza delle rispettive norme.

Dimostriamo prima l'inclusione $\subset$. Nel caso $\alpha < 1/2$ bisogna dimostrare che per ogni $u \in D_A(\alpha,\infty)$ esiste $C > 0$ per cui si ha $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha$ per ogni x, $y \in \mathbb{R}$. Si ha ovviamente, per ogni $t \in (0,1]$,

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - (e^{tA}u)(x)| + |(e^{tA}u)(x) - (e^{tA}u)(y)| + |(e^{tA}u)(y) - u(y)|$$

$$\leq 2t^\alpha [[u]]_{D_A(\alpha,\infty)} + |(e^{tA}u)(x) - (e^{tA}u)(y)|.$$

Per stimare il secondo addendo in termini di $|x-y|$ maggioriamo la derivata di $e^{tA}u$. Dall'uguaglianza

$$e^{tA}u - e^{A}u = -\int_t^1 Ae^{sA}u ds$$

si ottiene, usando la disuguaglianza di Landau (cfr. esercizio 5, §4.4.1)

$$\|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty^{1/2}\|f''\|_\infty^{1/2}, \ \ \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}),$$

$$\|d/dx\, e^{tA}u\|_\infty \leq \|d/dx\, e^{A}u\|_\infty + \int_t^1 \|d/dx\, Ae^{sA}u\|_\infty ds$$

$$\leq 2\|e^{A}u\|_\infty^{1/2}\|Ae^{A}u\|_\infty^{1/2} + \int_t^1 2\|Ae^{sA}u\|_\infty^{1/2}\|A^2e^{sA}u\|_\infty^{1/2} ds$$

$$\leq 2M_0^{1/2}M_1^{1/2}\|u\|_\infty + \int_t^1 2\|Ae^{sA}u\|_\infty^{1/2}\|Ae^{\frac{s}{2}A}Ae^{\frac{s}{2}A}u\|_\infty^{1/2} ds$$

$$\leq 2M_0^{1/2}M_1^{1/2}\|u\|_\infty + \int_t^1 Cs^{(\alpha-1)/2}s^{-1/2}s^{(\alpha-1)/2}[u]_{D_A(\alpha,\infty)} ds$$

$$\leq C'\bigg(\|u\|_\infty + \int_t^1 s^{\alpha-3/2}ds[u]_{D_A(\alpha,\infty)}\bigg),$$

e quindi

$$\|d/dx\, e^{tA}u\|_\infty \leq K(1 + t^{\alpha-1/2})\|u\|_{D_A(\alpha,\infty)} \tag{4.4.5}$$

(Osserviamo che se si usava direttamente la disuguaglianza di Landau per $f = e^{tA}u$ si otteneva $\|d/dx\, e^{tA}u\|_\infty \leq 2\|e^{tA}u\|_\infty^{1/2}\|Ae^{tA}u\|_\infty^{1/2} \leq 2(M_0\|u\|_\infty)^{1/2}([u]_\alpha t^{-1+\alpha})^{1/2} \leq ct^{\alpha/2-1/2}$ che è una stima peggiore rispetto alla (4.4.5), per t vicino a 0.)

Ritorniamo alla maggiorazione di $|u(x) - u(y)|$. Per ogni $t \in (0,1]$ si ha dunque

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - (e^{tA}u)(x)| + |(e^{tA}u)(y) - u(y)| + |(e^{tA}u)(x) - (e^{tA}u)(y)|$$

$$\leq 2\|u - e^{tA}u\|_\infty + \|d/dx\, e^{tA}u\|_\infty|x-y| \leq 2t^\alpha[[u]]_{D_A(\alpha,\infty)} + 2Kt^{\alpha-\frac{1}{2}}|x-y|\,\|u\|_{D_A(\alpha,\infty)}.$$

Se $|x-y| \leq 1$, scegliendo $t = |x-y|^2$ si ottiene che $|u(x) - u(y)| \leq (2+2K)|x-y|^{2\alpha}\,\|u\|_{D_A(\alpha,\infty)}$. Se $|x-y| > 1$ il rapporto $|x-y|^{-\alpha}|u(x)-u(y)|$ si maggiora banalmente con $2\|u\|_\infty$. Otteniamo cosí che u è 2α-Hölderiana e $[u]_{C^{2\alpha}} \leq C\|u\|_{D_A(\alpha,\infty)}$.

Sia ora $1/2 < \alpha < 1$. Con lo stesso calcolo che ha portato alla (4.4.5) si vede che $\|d/dx\, e^{tA}u - d/dx\, e^{\tau A}u\|_\infty \le C|t-\tau|^{\alpha-1/2}[u]_{D_A(\alpha,\infty)}$, e quindi $e^{tA}u$ converge per $t \to 0$ in $C^1_b(\mathbb{R})$, cosicché $u \in C^1_b(\mathbb{R})$. Prendendo poi $\tau = 0$ si ottiene ancora

$$\|d/dx\,(e^{tA}u - u)\|_\infty \le Ct^{\alpha-1/2}[u]_{D_A(\alpha,\infty)}, \ \ 0 < t \le 1.$$

Procedendo come nel caso $\alpha < 1/2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&|u'(x) - u'(y)| \le |u'(x) - (d/dx\, e^{tA}u)(x)| + |(d/dx\, e^{tA}u)(y) - u'(y)| \\
&+|(d/dx\, e^{tA}u)(x) - (d/dx\, e^{tA}u)(y)| \\
&\le 2\|d/dx\,(e^{tA}u - u)\|_\infty + \|d^2/dx^2\, e^{tA}u\|_\infty|x-y| \\
&\le 2Ct^{\alpha-1/2}[u]_{D_A(\alpha,\infty)} + t^{\alpha-1}|x-y|\,[u]_{D_A(\alpha,\infty)}.
\end{aligned}$$

Scegliendo come prima $t = |x-y|^2$ per gli x, y con $|x-y| \le 1$ si trova che u' è $(2\alpha-1)$-Hölderiana. Mettendo insieme le maggiorazioni trovate si vede anche che $\|u\|_{C^{2\alpha}_b} = \|u\|_{C^1_b} + [u']_{C^{2\alpha-1}} \le C\|u\|_{D_A(\alpha,\infty)}$.

Proviamo ora l'altra inclusione. Sia $u \in C^{2\alpha}_b(\mathbb{R})$; poniamo

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)\rho_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(y)\rho_t(x-y)dy,$$

dove $\rho \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ è una funzione pari, con supporto in $(-1,1)$, e tale che $0 \le \rho(x) \le 1$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$, e si è posto $\rho_t(x) = t^{-1}\rho(x/t)$. Poniamo inoltre

$$c_{k,\theta} = \int_{\mathbb{R}} |y|^\theta |d^k/dy^k\, \rho(y)|dy, \ \ k \in \mathbb{N}, \ \theta \ge 0.$$

Se $0 < \alpha < 1/2$ si ha allora

$$\begin{aligned}
&|u_t(x) - u(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (u(x-y) - u(x))\rho_t(y)dy\right| \\
&\le [u]_{C^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha}}{t}\rho\left(\frac{y}{t}\right)dy \le c_{0,2\alpha}t^{2\alpha}[u]_{C^{2\alpha}},
\end{aligned}$$

e inoltre, dato che $\int_{\mathbb{R}} \rho''(y)dy = 0$,

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}u_t(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} (u(x-y)-u(x))\rho_t''(y)dy\right| \le [u]_{C^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha}}{t^3}\left|\rho''\left(\frac{y}{t}\right)\right|dy \le c_{2,2\alpha}t^{2\alpha-2}[u]_{C^{2\alpha}}.$$

Sia ora $1/2 < \alpha < 1$. Per maggiorare $|u_t(x) - u(x)|$ osserviamo che essendo ρ pari l'integrale $\int_{\mathbb{R}} y\rho_t(y)dy$ è nullo. Si ha dunque

$$|u_t(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (u(x-y) - u(x) + u'(x)y)\rho_t(y)dy \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{x-y}^{x} (u'(x) - u'(s))ds\, \rho_t(y)dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha}[u']_{C^{2\alpha-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha}}{t} \rho\left(\frac{y}{t}\right) dy \leq \frac{c_{0,2\alpha}}{2\alpha} t^{2\alpha}[u]_{C^{2\alpha}}.$$

Si ha inoltre $d/dx\, u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} u'(x-y)\rho_t(y)dy$, e dato che $\int_{\mathbb{R}} \rho'(y)dy = 0$,

$$\left| \frac{d^2}{dx^2} u_t(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (u'(x-y) - u'(x))\rho_t'(y)dy \right| \leq c_{1,2\alpha-1} t^{2\alpha-2}[u]_{C^{2\alpha}}.$$

In entrambi i casi si ha dunque

$$|u_t(x) - u(x)| \leq Ct^{2\alpha}[u]_{C^{2\alpha}}, \quad \left| \frac{d^2}{dx^2} u_t(x) \right| \leq t^{2\alpha-2}[u]_{C^{2\alpha}}. \tag{4.4.6}$$

Ne segue che per $0 < t \leq 1$ si ha

$$\|t^{1-\alpha} Ae^{tA}u\| \leq \|t^{1-\alpha} Ae^{tA}(u - u_{t^{1/2}})\| + \|t^{1-\alpha} e^{tA} Au_{t^{1/2}}\|$$

$$\leq t^{1-\alpha} M_1 t^{-1} Ct^{\alpha}[u]_{C^{2\alpha}} + t^{1-\alpha} Ct^{\alpha-1}[u]_{C^{2\alpha}} = C'[u]_{C^{2\alpha}},$$

cosicché $u \in D_A(\alpha, \infty)$, e l'equivalenza è completamente dimostrata.

Osservazione 4.4.7. Osserviamo che la (4.4.6) vale anche per $\alpha = 1/2$. Ne segue che $Lip_b(\mathbb{R}) \subset D_A(1/2, \infty)$, e quindi che $C_b^1(\mathbb{R}) \subset D_A(1/2, \infty)$. Le inclusioni però sono strette: si può dimostrare infatti che

$$D_A(1/2, \infty) = \left\{ u \in C_b(\mathbb{R}) : \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) + u(y) - 2u((x+y)/2)|}{|x-y|} < \infty \right\},$$

e questo spazio contiene strettamente le lipschitziane (vedi [**?**, Z].

Dalla proposizione 4.4.4 segue che per ogni $\theta \in (0,1)$, l'operatore

$$B : D(B) = C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}) \mapsto C_b^{\theta}(\mathbb{R}), \quad Bu = u''$$

è settoriale in $C^{\theta}(\mathbb{R})$.

Sempre da questa caratterizzazione, e dalle considerazioni fatte prima, segue che la soluzione dell'equazione del calore in $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R}, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

è α-Hölderiana rispetto a t su $[0,T]\times\mathbb{R}$ (con costante di Hölder indipendente da x) se e solo se il dato iniziale u_0 appartiene a $C_b^{2\alpha}(\mathbb{R})$. In questo caso, grazie alla proposizione 4.4.4, $\|u(t,\cdot)\|_{D_A(\alpha,\infty)} \le C\|u_0\|_{D_A(\alpha,\infty)}$ per $0\le t\le T$, cosicché u è anche 2α-Hölderiana rispetto a x, con costante di Hölder indipendente da t. Si dice che u appartiene allo spazio $C_b^{\alpha,2\alpha}([0,T]\times\mathbb{R})$, per ogni $T>0$.

Quando X è uno spazio di funzioni continue si ha una caratterizzazione molto semplice degli spazi $D_A(\alpha,\infty)$, simile a quella del caso unidimensionale.

Teorema 4.4.8. *Sia $\alpha\in(0,1)$, $\alpha\ne 1/2$. Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) Sia $X=C_b(\mathbb{R}^n)$, e sia A definito da (4.3.3). Allora si ha $D_A(\alpha,\infty)=C_b^{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$, e le rispettive norme sono equivalenti.

(ii) Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2, sia $X=C(\overline{\Omega})$, e sia A definito da (4.3.4). Allora si ha $D_A(\alpha,\infty)=C_0^{2\alpha}(\overline{\Omega})=\{f\in C^{2\alpha}(\overline{\Omega}):\ f_{|\partial\Omega}=0\}$, e le rispettive norme sono equivalenti.

(iii) Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2, sia $X=C(\overline{\Omega})$, e sia A definito da (4.3.5). Allora si ha $D_A(\alpha,\infty)=C^{2\alpha}(\overline{\Omega})$ se $0<\alpha<1/2$, $D_A(\alpha,\infty)=\{f\in C^{2\alpha}(\overline{\Omega}):\ \mathcal{B}f_{|\partial\Omega}=0\}$ se $1/2<\alpha<1$, e le rispettive norme sono equivalenti.

4.4.1 Esercizi

1) Seguendo la falsariga dell'esempio 4.4.6, dimostrare che se $X=C([0,1])$, $D(A)=\{u\in C^2([0,1]):u(0)=u(1)=0\}$, $Au=u''$, allora per ogni $\alpha\in(0,1/2)$ si ha $D_A(\alpha,\infty)=\{u\in C^{2\alpha}([0,1]):u(0)=u(1)=0\}$.

2) Usando il risultato dell'esercizio 1, dare dei risultati di regolarità Hölderiana per la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x)=u_{xx}(t,x), \quad t>0,\ 0\le x\le\pi, \\ \\ u(0,x)=u_0(x), \quad 0\le x\le \pi, \\ \\ u_x(t,0)=u_x(t,\pi)=0, \quad t\ge 0. \end{cases} \tag{4.4.7}$$

3) Dimostrare che, per ogni $\alpha\in(0,1)$, $D_A(\alpha,\infty)$ è uno spazio di Banach.

4) Dare una dimostrazione piú breve della caratterizzazione di $D_A(\alpha,\infty)$ nell'esempio 4.4.6, sfruttando la formula di rappresentazione (3.1.9) per e^{tA} e la proposizione 4.4.2. Verificare che lo stesso argomento vale anche in $\mathbb{R}^n$, con u'' sostituito da Δu.

5) Usando la formula di Taylor, dimostrare la disuguaglianza di Landau

$$\|D_if\|_\infty \le 2(\|f\|_\infty)^{1/2}(\|D_{ii}f\|_\infty)^{1/2},\ \ \forall f\in C_b^2(\mathbb{R}^n),\ i=1,\dots,n, \tag{4.4.8}$$

e dedurne che $C_b^1(\mathbb{R}^n)$ è di classe $J_{1/2}$ fra $C_b(\mathbb{R}^n)$ e $C_b^2(\mathbb{R}^n)$.

6) Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Usando la disuguaglianza di Hölder dimostrare che se $1 < s < p < r$ allora $L^p(\Omega)$ è di classe J_α fra $L^s(\Omega)$ e $L^r(\Omega)$, con $\alpha \in (0,1)$ tale che $1/p = \alpha/r + (1-\alpha)/s$.

7) Sia $\mathcal{A}$ un operatore ellittico di ordine 2 in $\mathbb{R}^n$ con coefficienti uniformemente continui e limitati, e sia A la sua realizzazione in $X = C_b(\mathbb{R}^n)$. Usando la stima (4.3.6) provare che $C^1_b(\mathbb{R}^n)$ è di classe $J_{1/2}$ fra X e $D(A)$. Suggerimento: supporre prima che e^{tA} sia di tipo negativo e in tale caso dimostrare che la (4.3.6) vale per tutti i $\lambda > 0$.

8) Usando il risultato dell'esercizio 7 e seguendo la dimostrazione fatta nell'esempio 4.4.6, dimostrare l'affermazione (i) del teorema 4.4.8 per $0 < \alpha < 1/2$.

9) Dimostrare che se $A : D(A) \mapsto X$ è un operatore settoriale allora $D(A)$ è di classe $J_{1/2}$ fra X e $D(A^2)$.

4.5 Problemi non omogenei

Sia $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un operatore settoriale. Consideriamo il problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 < t \leq T, \\ \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

Se $f \in C([0,T];X)$ la definizione di soluzione stretta e di soluzione forte di (4.5.1) è identica a quella data nella definizione 3.3.1. In piú è molto importante anche la nozione di soluzione classica.

Definizione 4.5.1. *Siano $f : (0,T] \mapsto X$ continua, $x \in X$. Una funzione $u \in C^1((0,T]; X) \cap C((0,T];D(A)) \cap C([0,T];X)$ è detta* soluzione classica *di (4.5.1) in $[0,T]$ se $u'(t) = Au(t) + f(t)$ per ogni $t \in (0,T]$, e $u(0) = x$.*

Dalla definizione segue facilmente che se il problema (4.5.1) ha una soluzione stretta, allora

$$x \in D(A), \quad Ax + f(0) = u'(0) \in \overline{D(A)}, \tag{4.5.2}$$

mentre se il problema (3.3.1) ha una soluzione classica o forte, allora

$$x \in \overline{D(A)}. \tag{4.5.3}$$

Poniamo

$$M_k = \sup_{0<t\leq T+1} \|t^k A^k e^{tA}\|, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$M_{k,\alpha} = \sup_{0<t\leq T+1} \|t^{k-\alpha} A e^{tA}\|_{L(D_A(\alpha,\infty),X)}, \quad k = 1, 2.$$

Proposizione 4.5.2. *Sia $f \in C((0,T],X)$, tale che $t \mapsto \|f(t)\| \in L^1(0,T)$, sia $x \in \overline{D(A)}$. Se u è una soluzione classica di (3.3.1), allora è data dalla formula di variazione delle costanti*

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.5.4}$$

Dimostrazione. Sia u una soluzione classica, e sia $t \in (0, T]$. Dato che $u \in C^1((0,T]; X) \cap C((0,T]; D(A)) \cap C([0,T]; X)$, allora la funzione

$$v(s) = e^{(t-s)A}u(s), \quad 0 \le s \le t,$$

appartiene a $C([0,t]; X)$ (dimostrarlo) $\cap\, C^1((0,t), X)$, e

$$v(0) = e^{tA}x, \quad v(t) = u(t),$$

$$v'(s) = -Ae^{(t-s)A}u(s) + e^{(t-s)A}(Au(s) + f(s)) = e^{(t-s)A}f(s), \quad 0 < s < t.$$

Di conseguenza, per $0 < 2\varepsilon < t$ si ha

$$v(t-\varepsilon) - v(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} e^{(t-s)A}f(s)ds,$$

cosicché facendo tendere ε a 0, otteniamo

$$v(t) - v(0) = \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds,$$

e la tesi segue. ∎

Come nel caso dei semigruppi fortemente continui, tutte le volte che la formula (4.5.4) ha senso la funzione u data da (4.5.4) è detta *soluzione mild* di (3.3.1).

Nelle ipotesi della proposizione 4.5.2 la soluzione classica di (4.5.1) è unica. In particolare, per $f \equiv 0$ e $x \in \overline{D(A)}$ la funzione

$$t \mapsto u(t) = e^{tA}x, \quad t \ge 0,$$

è l'unica soluzione classica del problema omogeneo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Dalla proposizione 4.5.2 segue anche che la soluzione stretta di (4.5.1) è unica, ed è data da (4.5.4). Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 3.3.4 si vede che la soluzione forte di (4.5.1) è unica, ed è data da (4.5.4).

Tutte le volte che la formula (4.5.4) ha senso, la funzione da essa definita è detta *soluzione mild* di (4.5.1).

Come nel caso dei semigruppi fortemente continui, non è detto che per ogni $f : [0,T] \mapsto X$ continua la soluzione mild del problema (4.5.1) sia stretta o classica, anche se il dato iniziale soddisfa le condizioni di compatibilità necessarie. Vedremo invece che essa è sempre soluzione forte. Per quanto riguarda la sua regolarità, vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.5.3. *Sia $f \in C([0,T];X)$, oppure in $C_b((0,T];X)$. Allora per ogni $\alpha \in (0,1)$, la funzione*

$$v(t) = (e^{tA} \star f)(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds, \quad 0 \le t \le T,$$

appartiene a $C^\alpha([0,T];X)$, ed esiste $C = C(\alpha)$ tale che

$$\|v\|_{C^\alpha([0,T];X)} \le C \sup_{0<s<T} \|f(s)\|. \tag{4.5.5}$$

Inoltre per ogni sottospazio X_θ di classe J_θ fra X e $D(A)$, $v \in C^{1-\theta}([0,T];X_\theta)$, ed esiste $C > 0$ tale che

$$\|v\|_{C^{1-\theta}([0,T];X_\theta)} \le C\|f\|_{C([0,T];X)}. \tag{4.5.6}$$

Dimostrazione. Per $0 \le t \le T$ si ha

$$\|v(t)\| \le M_0 t \sup_{0\le s\le t} \|f(s)\|, \tag{4.5.7}$$

mentre per $0 \le s \le t \le T$ si ha

$$\begin{aligned} v(t) - v(s) &= \int_0^s \left(e^{(t-\sigma)A} - e^{(s-\sigma)A}\right) f(\sigma)d\sigma + \int_s^t e^{(t-\sigma)A} f(\sigma)d\sigma \\ &= \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} Ae^{\tau A} f(\sigma)d\tau + \int_s^t e^{(t-\sigma)A} f(\sigma)d\sigma, \end{aligned}$$

che implica

$$\begin{aligned} &\|v(t) - v(s)\| \le M_1 \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \frac{1}{\tau} d\tau \|f\|_\infty + M_0(t-s)\|f\|_\infty \\ &\le M_1 \int_0^s \frac{1}{(s-\sigma)^\alpha} \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \frac{1}{\tau^{1-\alpha}} d\tau \|f\|_\infty + M_0(t-s)\|f\|_\infty \qquad (4.5.8) \\ &\le \left(\frac{M_1 T^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} (t-s)^\alpha + M_0(t-s) \right) \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

cosicché v è α-Hölderiana. La stima (4.5.5) segue ora da (4.5.7) e da (4.5.8).

La dimostrazione della seconda affermazione è del tutto analoga, basta ricordare che esiste $K > 0$ tale che

$$\|Ae^{\tau A}\|_{L(X,X_\theta)} \le \frac{C}{\tau^{1+\theta}}, \quad \|e^{(t-\sigma)A}\|_{L(X,X_\theta)} \le \frac{C}{(t-\sigma)^\theta},$$

e sostituire negli integrali. ∎

La regolarità di $t \mapsto e^{tA}x$ è stata studiata nel paragrafo precedente.

Condizioni sufficienti perché la soluzione sia classica o stretta sono date dai teoremi seguenti. Il seguente lemma, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio, ci permetterà di risparmiare nelle dimostrazioni.

Lemma 4.5.4. *Siano $x \in \overline{D(A)}$, $f \in C((0,T];X)$ tale che $t \mapsto \|f(t)\| \in L^1(0,T)$, e sia u la soluzione mild di (4.5.1)). Valgono le seguenti affermazioni:*

(a) se $u \in C((0,T];D(A))$ allora u è soluzione classica di (4.5.1);

(b) se $u \in C^1((0,T];X)$ allora u è soluzione classica di (4.5.1).

Siano ora $x \in D(A)$, $f \in C([0,T];X)$ tali che $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, e sia ancora u la soluzione mild di (4.5.1)). Valgono le seguenti affermazioni:

(a) se $u \in C([0,T];D(A))$ allora u è soluzione stretta di (4.5.1);

(b) se $u \in C^1([0,T];X)$ allora u è soluzione stretta di (4.5.1).

Teorema 4.5.5. *Siano $0 < \alpha < 1$, $f \in C^\alpha([0,T],X)$, $x \in X$, e sia u la funzione definita in (4.5.1). Allora u appartiene a $C^\alpha([\varepsilon,T],D(A)) \cap C^{1+\alpha}([\varepsilon,T],X)$ per ogni $\varepsilon \in (0,T)$, e*

(i) se $x \in \overline{D(A)}$, u è soluzione classica di (3.3.1);

(ii) se $x \in D(A)$ e $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, u è soluzione stretta di (3.3.1), ed esiste C tale che

$$\|u\|_{C^1([0,T],X)} + \|u\|_{C([0,T],D(A))} \leq C(\|f\|_{C^\alpha([0,T],X)} + \|x\|_{D(A)}); \tag{4.5.9}$$

(iii) se $x \in D(A)$ e $Ax + f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$, allora u' e Au appartengono a $C^\alpha([0,T],X)$, u' appartiene a $B([0,T];D_A(\alpha,\infty))$, ed esiste C tale che

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C^{1+\alpha}(X)} + \|Au\|_{C^\alpha(X)} + \|u'\|_{B(D_A(\alpha,\infty))} \\ &\leq C(\|f\|_{C^\alpha(X)} + \|x\|_{D(A)} + \|Ax + f(0)\|_{D_A(\alpha,\infty)}). \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

Dimostrazione. Mostreremo che $u \in C((0,T];D(A))$ nel caso generale, e che $u \in C([0,T];D(A))$ nel caso in cui $x \in D(A)$ e $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$. Per dimostrare poi che u è derivabile in $(0,T]$ (rispettivamente, in $[0,T]$) si può ragionare in modo simile oppure usare il Lemma 4.5.4.

Poniamo $u = u_1 + u_2$, dove

$$\begin{cases} u_1(t) = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A}(f(s) - f(t))ds, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \\ u_2(t) = e^{tA}x + \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A}f(t)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{4.5.11}$$

Osserviamo che sia $u_1(t)$ che $u_2(t)$ appartengono a $D(A)$ per $t>0$. Per quanto riguarda $u_1(t)$ dalla maggiorazione

$$\|Ae^{(t-s)A}(f(s)-f(t))\| \leq \frac{M_1}{t-s}(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha}$$

si deduce che la funzione integranda è integrabile con valori in $D(A)$, per cui $u_1(t) \in D(A)$ per ogni $t \in (0,T]$ (e anche per $t=0$, ovviamente). Per quanto riguarda $u_2(t)$, sappiamo che $e^{tA}x \in D(A)$ per $t>0$, e che $\int_0^t e^{(t-s)A}f(t)ds \in D(A)$ per la proposizione 4.1.3(ii). Si ha inoltre

$$\begin{cases} (i) \quad Au_1(t) = \displaystyle\int_0^t Ae^{(t-s)A}(f(s)-f(t))ds, \;\; 0 \leq t \leq T, \\ \\ (ii) \quad Au_2(t) = Ae^{tA}x + (e^{tA}-1)f(t), \;\; 0 < t \leq T. \end{cases} \tag{4.5.12}$$

Se $x \in D(A)$, allora (4.5.12)(ii) vale anche per $t=0$. Mostriamo che Au_1 è Hölderiana in $[0,T]$. Per $0 \leq s \leq t \leq T$ si ha

$$\begin{aligned} &Au_1(t) - Au_1(s) = \int_0^s \Big(Ae^{(t-\sigma)A}(f(\sigma)-f(t)) - Ae^{(s-\sigma)A}(f(\sigma)-f(s))\Big) d\sigma \\ &+\int_s^t Ae^{(t-\sigma)A}(f(\sigma)-f(t))d\sigma \\ &= \int_0^s A\left(e^{(t-\sigma)A}-e^{(s-\sigma)A}\right)(f(\sigma)-f(s))d\sigma \\ &+(e^{tA}-e^{(t-s)A})(f(s)-f(t)) + \int_s^t Ae^{(t-\sigma)A}(f(\sigma)-f(t))d\sigma, \end{aligned} \tag{4.5.13}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \|Au_1(t)-Au_1(s)\| &\leq M_2\int_0^s (s-\sigma)^\alpha \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{-2} d\tau \; d\sigma [f]_{C^\alpha} \\ &+2M_0(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha} + M_1\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma [f]_{C^\alpha} \\ &\leq M_2\int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{\alpha-2}d\tau \; [f]_{C^\alpha} + (2M_0 + M_1\alpha^{-1})(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha} \\ &\leq \left(\frac{M_2}{\alpha(1-\alpha)} + 2M_0 + \frac{M_1}{\alpha}\right)(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha}. \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

Quindi, Au_1 è α-Hölderiana in tutto l'intervallo $[0,T]$. Inoltre Au_2 è α-Hölderiana in $[\varepsilon, T]$ per ogni $\varepsilon \in (0,T)$, come si verifica facilmente. Quindi $Au \in C^\alpha([\varepsilon,T];X)$. Essendo $u \in C^\alpha([\varepsilon,T];X)$ (in quanto $t \mapsto e^{tA}x \in C^\infty(0,T];X)$ e $t \mapsto \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \in C^\alpha([0,T];X)$

per la proposizione 4.5.3) ne segue che $u \in C^{\alpha}([\varepsilon, T]; D(A))$. Dato che ε è arbitrario, $u \in C((0,T]; D(A))$.

Per quanto riguarda il comportamento vicino a 0, se $x \in \overline{D(A)}$, allora $t \mapsto e^{tA}x \in C([0,T], X)$ e quindi $u \in C([0,T], X)$ (vedi prop. 4.5.3).

Se $x \in D(A)$ si può scrivere $Au_2(t)$ come

$$Au_2(t) = e^{tA}(Ax + f(0)) + e^{tA}(f(t) - f(0)) - f(t), \;\; 0 \le t \le T. \tag{4.5.15}$$

Se $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, allora esiste il limite per $t \to 0$ di $Au_2(t)$ ed è uguale a Ax, cosicché anche Au_2 è continua fino in $t = 0$, e quindi $u = u_1 + u_2 \in C([0,T]; D(A))$.

Nel caso in cui $Ax + f(0) \in D_A(\alpha, \infty)$, per $0 \le s \le t \le T$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\|Au_2(t) - Au_2(s)\| \le \|(e^{tA} - e^{sA})(Ax + f(0))\| \\
&+\|(e^{tA} - e^{sA})(f(s) - f(0))\| + \|(e^{tA} - 1)(f(t) - f(s))\| \\
&\le \int_s^t \|Ae^{\sigma A}\|_{L(D_A(\alpha,\infty),X)} d\sigma \, \|Ax + f(0)\|_{D_A(\alpha,\infty)} \\
&+s^{\alpha}\|A\int_s^t e^{\sigma A} d\sigma\|_{\mathcal{L}(X)}[f]_{C^{\alpha}} + (M_0 + 1)(t-s)^{\alpha}[f]_{C^{\alpha}} \\
&\le \frac{M_{1,\alpha}}{\alpha}\|Ax + f(0)\|_{D_A(\alpha,\infty)}(t-s)^{\alpha} + \left(\frac{M_1}{\alpha} + M_0 + 1\right)(t-s)^{\alpha}[f]_{C^{\alpha}},
\end{aligned} \tag{4.5.16}$$

cosicché anche Au_2 è Hölderiana, e la stima

$$\|u\|_{C^{1+\alpha}([0,T];X)} + \|Au\|_{C^{\alpha}([0,T];X)} \le c(\|f\|_{C^{\alpha}([0,T],X)} + \|x\|_{D(A)} + \|Ax + f(0)\|_{D_A(\alpha,\infty)})$$

segue facilmente.

Stimiamo ora $[u'(t)]_{D_A(\alpha,\infty)}$. Per $0 \le t \le T$ si ha

$$u'(t) = \int_0^t Ae^{(t-s)A}(f(s) - f(t))ds + e^{tA}(Ax + f(0)) + e^{tA}(f(t) - f(0)),$$

cosicché per $0 < \xi \le 1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&\|\xi^{1-\alpha}Ae^{\xi A}u'(t)\| \le \left\|\xi^{1-\alpha}\int_0^t A^2 e^{(t+\xi-s)A}(f(s) - f(t))ds\right\| \\
&+\|\xi^{1-\alpha}Ae^{(t+\xi)A}(Ax + f(0))\| + \|\xi^{1-\alpha}Ae^{(t+\xi)A}(f(t) - f(0))\| \\
&\le M_2\xi^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha}(t+\xi-s)^{-2}ds \; [f]_{C^{\alpha}} \\
&+M_0[Ax + f(0)]_{D_A(\alpha,\infty)} + M_1\xi^{1-\alpha}(t+\xi)^{-1}t^{\alpha} \; [f]_{C^{\alpha}} \\
&\le M_2\int_0^{\infty} \sigma^{\alpha}(\sigma + 1)^{-2}d\sigma[f]_{C^{\alpha}} + M_0[Ax + f(0)]_{D_A(\alpha,\infty)} + M_1[f]_{C^{\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.5.17}$$

Quindi, $[u'(t)]_{D_A(\alpha,\infty)}$ è limitata in $[0,T]$, e la dimostrazione è completa. ■

Teorema 4.5.6. *Sia* $0<\alpha<1$, *e sia* $f\in C([0,T];X)\cap B([0,T];D_A(\alpha,\infty))$. *Allora la funzione*

$$v(t)=(e^{tA}\star f)(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds,\;\;0\le t\le T,$$

appartiene a $C([0,T];D(A))\cap C^1([0,T];X)$, *ed è la soluzione stretta di*

$$v'(t)=Av(t)+f(t),\;\;0<t\le T,\;\;v(0)=0. \tag{4.5.18}$$

Inoltre, v' *e* Av *appartengono a* $B([0,T];D_A(\alpha,\infty))$, Av *appartiene allo spazio* $C^\alpha([0,T];X)$, *ed esiste* C *tale che*

$$\|v'\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}+\|Av\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}+\|Av\|_{C^\alpha(X)}\le C\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}. \tag{4.5.19}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che v è soluzione stretta di (4.5.18), e che vale (4.5.19). Per $0\le t\le T$, $v(t)$ appartiene $D(A)$, e si ha

$$\|Av(t)\|\le M_{1,\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}=\frac{T^\alpha M_{1,\alpha}}{\alpha}\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}. \tag{4.5.20}$$

Inoltre, per $0<\xi\le 1$ vale

$$\begin{aligned}\|\xi^{1-\alpha}Ae^{\xi A}Av(t)\|&=\xi^{1-\alpha}\left\|\int_0^t A^2e^{(t+\xi-s)A}f(s)ds\right\|\\ &\le M_{2,\alpha}\xi^{1-\alpha}\int_0^t (t+\xi-s)^{\alpha-2}ds\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}\le\frac{M_{2,\alpha}}{1-\alpha}\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))},\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

cosicché Av è limitata con valori in $D_A(\alpha,\infty)$. Proviamo che Av è Hölderiana con valori in X: per $0\le s\le t\le T$ si ha

$$\begin{aligned}\|Av(t)-Av(s)\|&\le\left\|A\int_0^s\left(e^{(t-\sigma)A}-e^{(s-\sigma)A}\right)f(\sigma)d\sigma\right\|\left\|A\int_s^t e^{(t-\sigma)A}f(\sigma)d\sigma\right\|\\ &\le M_{2,\alpha}\int_0^s d\sigma\int_{s-\sigma}^{t-\sigma}\tau^{\alpha-2}d\tau\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}+M_{1,\alpha}\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}\\ &\le\left(\frac{M_{2,\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}+\frac{M_{1,\alpha}}{\alpha}\right)(t-s)^\alpha\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))},\end{aligned} \tag{4.5.22}$$

per cui Av è α-Hölderiana in $[0,T]$. La stima (4.5.19) segue da (4.5.20), (4.5.21), (4.5.22).

Il fatto che v sia derivabile con valori in X si può dimostrare in modo simile oppure usando il risultato dell'esercizio 4, §4.4.6. ■

Corollario 4.5.7. *Siano* $0 < \alpha < 1$, $x \in X$, $f \in C([0,T];X) \cap B([0,T];\, D_A(\alpha,\infty))$, *e sia* u *data da (4.5.4). Allora* $u \in C^1((0,T];X) \cap C((0,T];\, D(A))$, *e* $u \in B([\varepsilon,T];D_A(\alpha+1,\infty))$ *per ogni* $\varepsilon \in (0,T)$. *Inoltre valgono le seguenti affermazioni.*

(i) Se $x \in \overline{D(A)}$, *allora* u *è soluzione classica di (3.3.1);*

(ii) Se $x \in D(A)$, $Ax \in \overline{D(A)}$, *allora* u *è soluzione stretta di (3.3.1);*

(iii) Se $x \in D_A(\alpha+1,\infty)$, *allora* u' *e* Au *appartengono a* $B([0,T];D_A(\alpha,\infty)) \cap C([0,T];X)$, Au *appartiene a* $C^\alpha([0,T];X)$, *ed esiste* C *tale che*

$$\|u'\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}+\|Au\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}+\|Au\|_{C^\alpha([0,T];X)} \leq C(\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}+\|x\|_{D_A(\alpha,\infty)}). \tag{4.5.23}$$

Dimostrazione. Scriviamo u come $u(t) = e^{tA}x + (e^{tA} \star f)(t)$. Se $x \in \overline{D(A)}$, la funzione $t \to e^{tA}x$ è la soluzione classica di $w' = Aw$, $t > 0$, $w(0) = x$. Se $x \in D(A)$ e $Ax \in \overline{D(A)}$ è soluzione stretta; se $x \in D_A(\alpha+1,\infty)$ è soluzione stretta e inoltre appartiene a $C^1([0,T];X) \cap B([0,T];D_A(\alpha+1,\infty))$. La tesi segue ora dal teorema 4.5.6. ■

Consideriamo ora il caso in cui f è solo continua con valori in X. Non ci aspettiamo, in generale, che se vale la condizione necessaria (4.5.2) la soluzione mild sia stretta, come mostra il seguente controesempio.

Esempio 4.5.8. *Siano* $X = L^2(0,\pi)$, $D(A) = H^2(0,\pi) \cap H^1_0(0,\pi)$, $A\varphi(\xi) = \varphi''(\xi)$. *Il problema* (4.5.1) *con* $x = 0$ *e* $f \in C([0,T];X)$, *non ha in generale soluzione stretta.*

Dimostrazione. Sappiamo già che A è settoriale ed ha dominio denso, che inoltre X ammette la base ortonormale $\{e_n(\xi) = (2/\pi)^{1/2}\sin n\xi,\ n \in \mathbb{N}\}$ fatta da autofunzioni di A, e si ha $Ae_n = -n^2e_n$ e di conseguenza $e^{tA}e_n = e^{-tn^2}e_n$.

Basta dimostrare l'affermazione per $T = 1$. Supponiamo per assurdo che per ogni $f \in C([0,1];X)$ il problema (4.5.1) con $x = 0$ abbia soluzione u stretta. Allora la funzione $C([0,1];D(A)) \cap C^1([0,1],X) \mapsto C([0,1],X)$, $u \mapsto u' - Au$, è continua e surgettiva, per cui esiste $C > 0$ indipendente da f tale che

$$\|u\|_{C([0,1];D(A))} \leq C\|f\|_{C([0,1];X)}. \tag{4.5.24}$$

Per $k \in \mathbb{N}$, siano $a_k = 1 - 2^{-2k}$, $b_k = a_k + 2^{-2k-1}$, e siano $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tali che

$$0 \leq \varphi_k(\xi) \leq 1, \ \ \varphi_k(\xi) = 1 \text{ per } \xi \in [a_k,b_k],$$

$$\varphi_k(0) = 0, \ \ \mathit{supp}\ \varphi_k \cap \mathit{supp}\ \varphi_h = \emptyset \ \mathit{for}\ h \neq k.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t)e_{2^k}, \ \ 0 \leq t \leq 1.$$

Dato che supp $\varphi_k \cap$ supp $\varphi_h = \emptyset$ per $h \neq k$, si ha

$$\sup_{0 \le t \le 1} \|f_n(t)\| = 1, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, essendo $f_n \in C^1([0,1]; D(A))$, per il Teorema 4.5.5(ii) o per il Corollario 4.5.7(ii), la funzione $u_n(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f_n(s) ds$ appartiene a $D(A)$ per ogni $t \in [0,1]$, e vale

$$Au_n(1) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_k(s) e^{(1-s)A} A e_{2^k} ds = -\sum_{k=1}^n \int_0^1 2^{2k} \varphi_k(s) e^{-2^{2k}(1-s)} ds \; e_{2^k},$$

cosicché

$$\|Au_n(1)\|^2 \geq \sum_{k=1}^n \left(\int_{a_k}^{b_k} 2^{2k} e^{-2^{2k}(1-s)} ds \right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(e^{-2^{2k}(1-b_k)} - e^{-2^{2k}(1-a_k)} \right)^2 \geq \sum_{k=1}^n (e^{-1/2} - e^{-1})^2.$$

Quindi non esiste alcun $C > 0$ tale che $\|Au_n\|_{C([0,1];X)} \leq C \|f_n\|_{C([0,1];X)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui (4.5.24) non vale. ■

Vale comunque la seguente proposizione.

Proposizione 4.5.9. *Sia* $f \in C([0,T]; X)$, $x \in \overline{D(A)}$. *Allora la funzione* u *data da (3.3.2) è soluzione forte di (3.3.1).*

Dimostrazione. Fissiamo $\lambda \in \rho(A)$. Allora $x + (A - \lambda I)^{-1} f(0)$ appartiene a $\overline{D(A)}$, cosicché esiste una successione $\{y_n\} \subset D(A^2)$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} y_n = x + (A - \lambda I)^{-1} f(0).$$

Inoltre, esiste una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni di classe C^1, tali che

$$f_n(0) = f(0), \;\; \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{C([0,T];X)} = 0.$$

Per esempio, possiamo prendere la successione dei polinomi di Bernstein di f (cfr. esercizio 1, §5.1.3). Poniamo

$$x_n = y_n - (A - \lambda I)^{-1} f(0), \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Allora $x_n \in D(A)$, $Ax_n + f_n(0) = Ay_n - \lambda(A - \lambda I)^{-1} f(0)$ appartiene a $D(A)$ e quindi a $\overline{D(A)}$. Per il teorema 4.5.5(ii), il problema

$$u_n'(t) = Au_n(t) + f_n(t), \;\; t > 0; \quad u_n(0) = x_n,$$

ha un'unica soluzione stretta u_n. Inoltre vale

$$\|u_n - u\|_{C([0,T];X)} \leq M_0(\|x_n - x\| + T\|f_n - f\|_{C([0,T];X)}).$$

Dato che $x_n \to x$ e $f_n \to f$ per $n \to \infty$, la tesi segue. ■

4.5.1 Esercizi

1) Sia $f : [a,b] \mapsto X$ continua. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$P_n(t) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t-a)^k (b-t)^{n-k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Le funzioni P_n sono dette *polinomi di Bernstein* di f. Usando (dopo averle dimostrate) le identità

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2,$$

provare che $P_n \to f$ in $C([a,b];X)$ per $n \to \infty$. (Suggerimento: dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta = \delta(\varepsilon)$ il modulo di uniforme continuità di f, scrivere la differenza $P_n(t) - f(t)$ dividendo la somma sui k da 0 a n nella somma sui k tali che $|a + \frac{k}{n}(b-a) - t| \leq \delta$ piú la somma sui k tali che $|a + \frac{k}{n}(b-a) - t| > \delta$. La stima della prima somma è ovvia, nella seconda maggiorare 1 con $(k - n(t-a))^2/n^2\delta^2$ e usare le formule sopra).

2) Dimostrare la seconda parte della proposizione 4.5.3.

3) Siano $x \in X$, $f \in C((0,T];X)$ tale che $t \mapsto \|f(t)\| \in L^1(0,T)$, e sia u la soluzione mild di (4.5.1)). Provare che per ogni $t \in [0,T]$ l'integrale $\int_0^t u(s)ds$ appartiene al dominio di A e che

$$u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds + \int_0^t f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

4) Dimostrare il lemma 4.5.4, usando il risultato dell'esercizio 3.

5) Usando i risultati dei teoremi 4.5.5, 4.5.6, e la caratterizzazione degli spazi $D_A(\alpha, \infty)$ del §4.3, dare qualche risultato di regolarità Hölderiana per le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + f(t,x), & 0 < t \leq T, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(t,x), & 0 < t \leq T, \ 0 \leq x \leq 1, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

4.6 Comportamento asintotico

4.6.1 Comportamento di e^{tA}

Una delle proprietà piú utili degli operatori settoriali è quella che in americano viene chiamata *spectrum determining condition*: grosso modo, il comportamento asintotico (per $t \to +\infty$) di e^{tA} e piú in generale di $A^n e^{tA}$ è determinato dalle proprietà spettrali di A.

Ricordiamo che il tipo ω_0 di e^{tA} è definito da $\omega_0 = \inf\{\log \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)}/t \,:\, t > 0\} = \inf\{\beta \,:\, \exists M > 0$ tale che $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}, \ \forall t > 0\}$ (cfr. §3.1.2). Vale ancora la proposizione 3.1.13, enunciata per i semigruppi fortemente continui: infatti nella dimostrazione non si è sfruttata in modo essenziale la forte continuità ma solo una sua conseguenza, ossia il fatto che $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)}$ è limitata al variare di t in un qualunque limitato di $[0, +\infty)$; ciò è vero anche per i semigruppi analitici.

Poniamo

$$\omega_A = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proposizione 4.6.1. *Si ha*

$$\omega_0 = \omega_A.$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\varepsilon > 0$ esistono $M_{n,\varepsilon} > 0$ tali che

$$\|t^n A^n e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_{n,\varepsilon} e^{(\omega_A + \varepsilon)t}, \ \ t > 0. \tag{4.6.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt$ è ben definita e olomorfa dal semipiano $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$ con valori in $\mathcal{L}(X)$, e coincide con $R(\lambda, A)$ per $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, grazie alla Proposizione 4.1.5. Per il Corollario 2.1.6, l'insieme risolvente di A contiene il semipiano $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$, nel quale si ha $R(\lambda, A) = F(\lambda)$. Lo spettro di A è contenuto nel semipiano complementare $\mathrm{Re}\,\lambda \leq \omega_0$, per cui $\omega_A \leq \omega_0$. Dimostreremo la disuguaglianza opposta mostrando che vale la (4.6.1) con $n = 0$; questa implica che $\omega_A + \varepsilon \geq \omega_0$ per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi che $\omega_A \geq \omega_0$.

Si ha evidentemente $\omega_A \leq \omega$, dove ω è dato nella definizione 4.1.1. Per $0 < t \leq 1$, le stime (4.6.1) sono una conseguenza ovvia di (4.1.5). Se $t \geq 1$ e ε è grande (tale che $\omega_A + \varepsilon \geq \omega$), (4.6.1) è ancora una conseguenza di (4.1.5). Consideriamo il caso in cui $t \geq 1$ e $\omega_A + \varepsilon < \omega$.

Prendiamo r piccolo ($0 < r \leq \omega - (\omega_A + \varepsilon)$) e deformiamo la curva $\gamma_{r,\eta}$ usata nella definizione di e^{tA} sostituendo la parte di $\gamma_{r,\eta}$ appartenente al semipiano $\mathrm{Re}\ \lambda \geq \omega_A + \varepsilon$ con un segmento verticale: consideriamo cioè la curva (orientata come di consueto)

$$\begin{aligned}
\gamma_\varepsilon &= \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \lambda = \xi e^{-i\eta} + \omega, \ \xi \geq a\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \lambda = \xi e^{i\eta} + \omega, \ \xi \geq a\} \\
&\cup \ \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\ \ \lambda = \omega_A + \varepsilon, \ |\mathrm{Im}\ \lambda| \leq b\} \\
&= \ \gamma_\varepsilon^{(1)} \cup \gamma_\varepsilon^{(2)} \cup \gamma_\varepsilon^{(3)}
\end{aligned}$$

dove si è posto $a = (\omega - \omega_A - \varepsilon)|\cos\eta|^{-1}$, $b = (\omega - \omega_A - \varepsilon)|\tan\eta|$. Per costruzione, γ_ε è contenuta in $\rho(A)$. Dato che per ogni t la funzione $\lambda \to e^{\lambda t}R(\lambda, A)$ è olomorfa in $\rho(A)$ si ha

$$\int_{\gamma_{r,\eta}-\gamma_\varepsilon} e^{\lambda t}R(\lambda, A)d\lambda = 0,$$

per cui

$$e^{tA} = \int_{\gamma_\varepsilon} e^{\lambda t}R(\lambda, A)d\lambda.$$

Le due semirette $\gamma_\varepsilon^{(1)}$ e $\gamma_\varepsilon^{(2)}$ sono contenute nel settore $S_{\theta,\omega}$, e quindi $\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \le M|\lambda - \omega|^{-1}$ su $\gamma_\varepsilon^{(1)}$ e $\gamma_\varepsilon^{(2)}$. Il segmento $\gamma_\varepsilon^{(3)}$ è contenuto in $\rho(A)$. La funzione $\|R(\cdot, A)\|_{L(X)}$ è continua in $\rho(A)$ e quindi limitata su $\gamma_\varepsilon^{(3)}$. Sia M_ε tale che $\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \le M_\varepsilon$ per ogni $\lambda \in \gamma_\varepsilon^{(3)}$. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\|e^{tA}\| &\le \frac{M}{\pi}\int_a^{+\infty} \frac{e^{(\omega+\xi\cos\eta)t}}{\xi}\,d\xi + \frac{M_\varepsilon}{2\pi}\int_{-b}^{b} e^{(\omega_A+\varepsilon)t}dy\\ &\le \frac{M}{\pi a|\cos\eta|}e^{(\omega+a\cos\eta)t} + \frac{M_\varepsilon b}{\pi}\,e^{(\omega_A+\varepsilon)t} \le \left(\frac{M}{\pi(\omega-\omega_A+\varepsilon)} + \frac{M_\varepsilon b}{\pi}\right)e^{(\omega_A+\varepsilon)t}.\end{aligned}$$

La stima (4.6.1) segue per $n = 0$.

Sia $n \in \mathbb{N}$. Per $t \ge 1$ si ha, usando le stime (4.1.5) e la (4.6.1) con $n = 0$,

$$\|A^n e^{tA}\|_{L(X)} \le \|A^n e^{A/2}\|_{L(X)}\|e^{(t-1/2)A}\|_{L(X)} \le 2^{-n}C_{n,\varepsilon}e^{(\omega+\varepsilon)/2}M_{0,\varepsilon}e^{(\omega_A+\varepsilon)(t-1/2)}.$$

Maggiorando t^n con $Ce^{\varepsilon t}$ segue la tesi, per l'arbitrarietà di ε. ∎

Osserviamo che nel caso $\omega_A = \omega = 0$, le stime (4.1.5) sono meglio delle (4.6.1) per t grande.

Poniamoci ora il problema della limitatezza della funzione $t \mapsto \|e^{tA}x\|$ per t in $[0, +\infty)$. Dalla proposizione 4.6.1 segue che se $\omega_A < 0$, allora tale funzione è limitata (anzi decade esponenzialmente a 0 per $t \to \infty$) per ogni $x \in X$. Nel caso in cui $\omega_A \ge 0$, ci chiediamo se sia possibile caratterizzare gli elementi x per cui $\|e^{tA}x\|$ è limitata in $[0, +\infty)$. Vedremo che ciò è possibile nel caso in cui lo spettro di A non intersechi l'asse immaginario.

Supponiamo dunque che

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset. \tag{4.6.2}$$

Poniamo $\sigma(A) = \sigma_- \cup \sigma_+$, dove

$$\sigma_- = \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}, \quad \sigma_+ = \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}. \tag{4.6.3}$$

Dato che σ_-, σ_+ sono chiusi e contenuti in $S_{\theta,\omega}$ si ha

$$-\omega_- = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma_-\} < 0, \quad \omega_+ = \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma_+\} > 0. \tag{4.6.4}$$

σ_- e σ_+ possono essere anche vuoti: in questi casi poniamo $\omega_- = +\infty$, $\omega_+ = +\infty$.

Introduciamo ora un importante operatore lineare.

Definizione 4.6.2. *Sia P l'operatore definito da*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} R(\lambda, A) d\lambda, \tag{4.6.5}$$

dove γ_+ è una curva regolare a tratti, chiusa, contenuta in $\rho(A)$, che circonda σ_+, orientata in senso antiorario, con indice 1 rispetto a ogni punto di σ_+, e con indice 0 rispetto a ogni punto di σ_-.

P è detto proiezione spettrale *relativa a σ_+.*

Proposizione 4.6.3. *Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) P è una proiezione, cioè $P^2 = P$, inoltre $P \in L(X, D(A^n))$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Per ogni $t \geq 0$ si ha

$$e^{tA} P = P e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda.$$

Di conseguenza, $e^{tA}(P(X)) \subset P(X)$, $e^{tA}((I-P)(X)) \subset (I-P)(X)$.

(iii) Posto

$$e^{tA} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{\lambda t} R(\lambda, A) x \, d\lambda, \quad x \in P(X), \ t < 0,$$

si ha, per ogni $x \in P(X)$,

$$e^{tA} e^{sA} x = e^{(t+s)A} x, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} x \in D(A^n) \ \ n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{tA} x = A^n e^{tA} x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iv) Per ogni $\omega \in [0, \omega_+)$ esiste $N_\omega > 0$ tale che per ogni $x \in P(X)$ si ha

$$\|e^{tA} x\| + \|A e^{tA} x\| + \|A^2 e^{tA} x\| \leq N_\omega e^{\omega t} \|x\|, \quad t \leq 0.$$

(v) Per ogni $\omega \in [0, \omega_-)$ esiste $M_\omega > 0$ tale che per ogni $x \in (I-P)(X)$ si ha

$$\|e^{tA} x\| + \|t A e^{tA} x\| + \|t^2 A^2 e^{tA} x\| \leq M_\omega e^{-\omega t} \|x\|, \quad t \geq 0.$$

Dimostrazione. (i) Siano γ_+, γ_+' curve regolari contenute in $\rho(A)$ che circondano σ_+, con indice 1 rispetto a ogni punto di σ_+, e tali che γ_+ è contenuta nelle componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma'_+$. Si ha allora

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma'_+} R(\xi, A) d\xi \int_{\gamma_+} R(\lambda, A) d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma'_+ \times \gamma_+} [R(\lambda, A) - R(\xi, A)](\xi - \lambda)^{-1} d\xi d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_+} R(\lambda, A) d\lambda \int_{\gamma'_+} (\xi - \lambda)^{-1} d\xi - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma'_+} R(\xi, A) d\xi \int_{\gamma_+} (\xi - \lambda)^{-1} d\lambda \\ &= P. \end{aligned}$$

La dimostrazione di (ii) è analoga ed è lasciata per esercizio.

(iii) Dato che il cammino γ_+ è limitato, e la funzione integranda è continua con valori in $D(A)$, l'integrale che definisce $e^{tA}x$, per $t \le 0$ e $x \in P(X)$, ha valori in $D(A)$. Inoltre si ha

$$Ae^{tA}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{\lambda t}(\lambda R(\lambda, A)x - x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{\lambda t} \lambda R(\lambda, A) x d\lambda,$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda = A e^{tA} x.$$

Si dimostra poi per induzione che $e^{tA}x \in D(A^n)$ per ogni n, e che

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{tA} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \lambda^n e^{\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda = A^n e^{tA} x.$$

(iv) Dato $\omega \in [0, \omega_+)$, scegliamo γ_+ in modo che $\inf_{\lambda \in \gamma_+} \operatorname{Re} \lambda = \omega$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \|A^n e^{tA} x\| &\le \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_+} |\lambda|^n |e^{\lambda t}| \, \|R(\lambda, A)\| \, \|x\| d\lambda \right| \\ &\le c_n \sup\nolimits_{\lambda \in \gamma_+} |e^{\lambda t}| \, \|x\| = c_n e^{\omega t} \|x\|. \end{aligned}$$

(v) Si ha

$$e^{tA}(I - P) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_{r,\eta}} - \int_{\gamma_+} \right) e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda = \int_{\gamma_-} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda,$$

con $\gamma_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda = -\omega + re^{\pm i\eta}, \ r \ge 0\}$, orientata come al solito, e η opportuno $> \pi/2$. Le maggiorazioni si fanno nel modo consueto, come nella dimostrazione della Proposizione 4.6.1, e sono lasciate per esercizio. ∎

Corollario 4.6.4. *Dato $x \in X$, si ha*

$$\sup_{t\geq 0} \|e^{tA}x\| < \infty \Longleftrightarrow Px = 0.$$

Dimostrazione. Scriviamo ogni $x \in X$ come $x = Px + (I-P)x$, per cui $e^{tA}x = e^{tA}Px + e^{tA}(I-P)x$. La norma del secondo addendo decade esponenzialmente a 0 per $t \to +\infty$. La norma del primo è illimitata se $Px \neq 0$. Infatti, $Px = e^{-tA}e^{tA}Px$, cosicché $\|Px\| \leq \|e^{-tA}\|_{L(P(X))}\|e^{tA}Px\| \leq N_\omega e^{-\omega t}\|e^{tA}Px\|$ con $\omega > 0$, da cui segue $\|e^{tA}Px\| \geq e^{\omega t}\|Px\|/N_\omega$. Quindi $t \mapsto \|e^{tA}x\|$ è limitata su $\mathbb{R}_+$ se e solo se $Px = 0$. ■

Osservazione 4.6.5. Sia λ_0 un elemento isolato dello spettro di A. Definiamo la proiezione associata

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\lambda_0,\varepsilon)} R(\lambda, A)d\lambda,$$

dove $C(\lambda_0, \varepsilon)$ è la circonferenza (orientata in senso antiorario) centrata in λ_0 e raggio ε abbastanza piccolo in modo che l'unico elemento dello spettro di A appartenente alla chiusura del cerchio sia λ_0. P_0 coincide con la proiezione definita in (4.6.5) se σ_+ consiste del solo elemento λ_0 (vedi Sezione 2.2).

Per ogni $t \geq 0$ abbiamo

$$e^{tA}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\lambda_0,\varepsilon)} e^{\lambda t}R(\lambda, A)x\, d\lambda, \quad x \in P_0(X),$$

e la dimostrazione è la stessa del punto (ii) nella proposizione 4.6.3. Infatti nella dimostrazione non si è sfruttato il fatto che gli elementi di σ_+ avessero parte reale positiva, ma solo che le chiusure di σ_+ e di σ_- non si intersecano.

Come nella proposizione 4.6.3, tale formula può essere usata per definire e^{tA} su $P_0(X)$ anche per $t < 0$, e per dare una rappresentazione piú esplicita di $e^{tA}P_0$ stesso: infatti sostituendo lo sviluppo di Laurent del risolvente e integrando si ottiene, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tA}P_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\lambda_0,\varepsilon)} e^{\lambda t}\left(P_0(\lambda-\lambda_0)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_0^n(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}\right)d\lambda = e^{\lambda_0 t}\left(P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D_0^n\right).$$

In particolare, λ_0 è un autovalore semisemplice se e solo se $e^{tA}P_0 = e^{\lambda_0 t}P_0$.

Da queste osservazioni otteniamo la seguente importante conseguenza nel caso critico di stabilità in cui $\omega_A = 0$. Se gli elementi dello spettro di A con parte reale nulla sono isolati in $\sigma(A)$ (e quindi sono in numero finito, chiamiamoli $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$) allora $t \mapsto \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)}$ è limitata in $[0, +\infty)$ se e solo se tutti i λ_j sono autovalori semisemplici di A. Infatti, posto $P = \sum_{j=1}^{N} P_j$, dove P_j è la proiezione associata a λ_j, si ha

$$e^{tA} = e^{tA}(I-P) + \sum_{j=1}^{N} e^{\lambda_j t}\left(P_j + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D_j^n\right).$$

La norma di $e^{tA}(I-P)$ è limitata in $[0,\infty)$, anzi decade esponenzialmente per $t\to\infty$. Quindi $t\mapsto \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)}$ è limitata in $(0,+\infty)$ se e solo se ogni D_j è nullo, ossia se e solo se ogni λ_j è un autovalore semisemplice.

Esempio 4.6.6. Riprendiamo gli esempi 4.2.3 e 4.2.5.

Nel caso dell'esempio 4.2.3, abbiamo $X = C_b(\mathbb{R})$ oppure $X = L^p(\mathbb{R})$ con $1\le p<\infty$, A è la realizzazione della derivata seconda in X con dominio $C^2_b(\mathbb{R})$ nel primo caso, $W^{2,p}(\mathbb{R})$ nel secondo. In entrambi i casi abbiamo $\rho(A) = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, $\|\lambda R(\lambda,A)\|\le(\cos\theta/2)^{-1}$, essendo $\theta = \arg\lambda$. Siamo nel caso in cui $\omega=\omega_A=0$, e le stime (4.6.1) sono peggiori delle (4.1.5) per t grande. Conviene usare le (4.1.5), che danno

$$\|e^{tA}\|\le M_0,\ \ \|t^kA^ke^{tA}\|\le M_k,\ \ k\in\mathbb{N},\ t>0.$$

Quindi, per ogni $f\in X$, $t\mapsto e^{tA}f$ ha norma limitata in $(0,+\infty)$, e le sue derivate k-esima rispetto al tempo e $2k$-esima rispetto alla variabile spaziale x decadono per $t\to+\infty$ almeno come t^{-k}, nella norma di X.

Consideriamo ora $X = C([0,\pi])$ oppure $X = L^p(0,\pi)$ con $1\le p<\infty$, e $D(A) = \{f\in C^2([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$ nel primo caso, $D(A) = W^{1,p}_0(0,\pi)\cap W^{2,p}(0,\pi)$ nel secondo caso, $Au = u'' + \alpha u$, dove $\alpha\in\mathbb{R}$ è un numero fissato. Posto $B : D(A)\mapsto X$, $Bu = u''$, si ha (cfr. esercizio 3, §2.1.1) $\rho(A) = \rho(B)+\alpha$, $R(\lambda,A) = R(\lambda-\alpha,B)$ per ogni $\lambda\in\rho(A)$. Inoltre lo spettro di A è dato dalla successione di autovalori

$$\lambda_k = -k^2+\alpha,\ \ k\in\mathbb{N},$$

e se $\lambda\neq -k^2$ per ogni $k\in\mathbb{N}$, si ha $R(\lambda,A) = R(\lambda-\alpha,B)$. In particolare, se $\alpha<1$ lo spettro è contenuto nel semipiano $\{\lambda\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda<0\}$, e per la proposizione 4.6.1 $\|e^{tA}\|$ decade esponenzialmente per $t\to\infty$.

Se $\alpha = 1$ allora $\omega_0 = 0$, $\rho(A)\setminus\{0\}$ è contenuto in $(-\infty,-3]$. Per l'osservazione 4.6.5, la norma $\|e^{tA}\|$ è limitata in $(0,+\infty)$ se e solo se 0 è autovalore semisemplice di A. In effetti, tutti gli autovalori di B sono semplici, dato che sono poli semplici del risolvente come si vede dall'espressione del risolvente (4.2.3) (cfr. esercizio 6, §2.2.1). Quindi 0 è autovalore semplice di A, e la funzione $t\mapsto e^{tA}f$ è limitata con valori in X per ogni $f\in X$.

Se $\alpha>1$, esistono elementi dello spettro di A con parte reale positiva. Nel caso in cui $\alpha\neq -n^2$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, è verificata l' ipotesi (4.6.2). Per il corollario 4.6.4, le funzioni f per cui $\|e^{tA}f\|$ è limitata sono tutte e sole le f tali che $Pf=0$, dove P è la proiezione spettrale relativa a σ_+. Sia $n\in\mathbb{N}$ tale che $n^2<\alpha<(n+1)^2$. Allora la proiezione P si può scrivere come

$$P = \sum_{k=1}^n P_k,$$

essendo $P_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\lambda_k,\varepsilon)} R(\lambda,A)d\lambda$, e i $\lambda_k = -k^2+\alpha$, $k = 1,\dots,n$, sono gli autovalori di A con parte reale positiva. Dato che abbiamo una espressione esplicita di $R(\lambda,A)$ si può calcolare ogni P_k e quindi P, usando la formula

$$P_k = \lim_{\lambda\to -k^2+\alpha}(\lambda+k^2-\alpha)R(\lambda,A) = \lim_{z\to -k^2}(z+k^2)R(z,B).$$

che segue dallo sviluppo di Laurent del risolvente vicino a λ_k. Possiamo scorciare il procedimento ragionando come segue: nel caso $X = L^2(0,\pi)$, dato che l'operatore A è autoaggiunto, per il Lemma 2.2.12 la proiezione P_k è la proiezione ortogonale sull'autospazio relativo all'autovalore λ_k, che ha dimensione 1 ed è generato dalla funzione $\sin(k\cdot)$. Posto $e_k(\xi) = \sqrt{2/\pi}\sin(k\xi)$, e_k ha norma 1 e si ha $P_k f = \langle e_k, f\rangle e_k$, ossia

$$(P_k f)(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ky\, f(y)dy \sin k\xi, \quad \xi \in [0,\pi]. \tag{4.6.6}$$

Nel caso $X = C([0,\pi])$ oppure $X = L^p(0,\pi)$ con $p \neq 2$, usiamo il Lemma 2.2.11. Dato che λ_k è autovalore semisemplice e l'autospazio ha dimensione 1, la proiezione P_k è l'unica proiezione sull'autospazio che commuta con A. Effettivamente la proiezione data da $f \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ky\, f(y)dy \sin k\cdot$ commuta con A su $D(A)$ (basta integrare due volte per parti nell'integrale), e quindi coincide anche in questo caso con P_k.

Ricapitolando, per ogni $f \in X$ la funzione $t \mapsto \|e^{tA}f\|$ è limitata in $(0,+\infty)$ se e solo se

$$\int_0^\pi \sin ky\, f(y)dy = 0, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Resta l'ultimo caso, $\alpha = n^2$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Allora lo spettro di A è costituito dagli $n-1$ autovalori positivi $\lambda_k = -k^2+\alpha$, $k = 1,\ldots,n-1$, dall'autovalore $\lambda_n = 0$, e dagli altri autovalori λ_k con $k > n$, tutti negativi. Chiamiamo ancora P_k la proiezione spettrale relativa a ciascun autovalore λ_k. L'ipotesi $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ è violata, ma dato che 0 è un autovalore semisemplice, $t \mapsto \|e^{tA}P_n\|$ è limitata in $(0,+\infty)$. Conviene scrivere $X = Q(X) \oplus (I-Q)(X)$ dove $Q = \sum_{k=1}^n P_k$. Q è la proiezione spettrale relativa all'insieme $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, vedi esercizio 8, §2.2.1. La norma di $e^{tA}(I-Q)$ è limitata in $(0,+\infty)$, anzi decade esponenzialmente a 0 per $t \to \infty$. Quindi $\|e^{tA}f\|$ è limitata in $(0,+\infty)$ se e solo se lo è $\|e^{tA}Qf\| = \|\sum_{k=1}^n e^{tA}P_k f\|$, e questo è verificato se e solo se $P_k f = 0$ per ogni $k = 1,\ldots,n-1$.

Leggiamo questi risultati quando $f \in C([0,\pi])$ in termini di proprietà della soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \alpha u(t,x), & t > 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\[2ex] u(0,x) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\[2ex] u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.6.7}$$

Quando $\alpha < 1$, la soluzione $u(t,\cdot) = e^{tA}f$ di (4.6.7) e tutte le sue derivate decadono esponenzialmente nella norma del sup per $t \to +\infty$, qualunque sia il dato iniziale f.

Quando $\alpha = 1$, la soluzione è limitata per ogni $f \in C([0,\pi])$. Quando $\alpha > 1$, $\alpha \in (n^2,(n+1)^2]$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, la soluzione è limitata se e solo se f soddisfa le condizioni

$$\int_0^\pi \sin ky\, f(y)dy = 0, \quad k = 1,\ldots,n.$$

4.7 Comportamento asintotico in problemi non omogenei

4.7.1 Soluzioni limitate in $[0, +\infty)$

In questa sezione ci occuperemo del problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.7.1}$$

con $f : [0, +\infty) \mapsto X$ continua, e $u_0 \in X$. Supporremo che

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset. \tag{4.7.2}$$

Poniamo, come nella sezione precedente, $\sigma_- = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$, e $\sigma_+ = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$, e

$$-\omega_- = \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \ \lambda \in \sigma_-\} < 0 < \omega_+ = \inf\{\mathrm{Re}\,\lambda : \ \lambda \in \sigma_+\}.$$

Sia P la proiezione definita da (4.6.5). Fissiamo una volta per tutte un numero reale ω tale che

$$0 < \omega < \min\{\omega_+, \omega_-\},$$

e siano M_ω, N_ω le costanti date dalla proposizione 4.6.3(iv)(v).

Ricordiamo che $C_b([0, +\infty); X)$ è lo spazio delle funzioni continue e limitate da $[0, +\infty)$ a X, dotato della norma del sup $\|\cdot\|_\infty$, e che, per $0 < \alpha < 1$, $C_b^\alpha([0, +\infty); X)$ è il sottospazio di $C_b([0, +\infty); X)$ costituito dalle funzioni hölderiane di esponente α, ed è dotato della norma

$$\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_\infty + [f]_{C^\alpha} = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\| + \sup_{0 \leq s < t} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{(t - s)^\alpha}.$$

Dati $f \in C_b([0, +\infty); X)$, $u_0 \in X$, poniamo

$$u_1(t) = e^{tA}(I - P)u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(I - P)f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

$$u_2(t) = -\int_t^{+\infty} e^{(t-s)A}Pf(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Osserviamo che u_1 è la soluzione mild del problema

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + (I - P)f(t), \quad t > 0, \\ \\ v(0) = (I - P)u_0, \end{cases} \tag{4.7.3}$$

mentre u_2 è la soluzione mild (ma anche stretta, dato che la parte di A in $P(X)$ appartiene a $\mathcal{L}(P(X))$ del problema

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + Pf(t), \quad t > 0, \\ \\ v(0) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sA}Pf(s)ds. \end{cases}$$

Lemma 4.7.1. *Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) Per ogni $f \in C_b([0,+\infty);X)$ e per ogni $u_0 \in \overline{D(A)}$ la funzione u_1 appartiene a $C_b([0,+\infty);X)$, ed esiste C_1 indipendente da f e u_0 tale che

$$\|u_1\|_\infty \leq C_1(\|u_0\| + \|f\|_\infty), \tag{4.7.4}$$

Se in piú $f \in C_b^\alpha([0,+\infty);X)$, $u_0 \in D(A)$, $Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$, allora u_1', Au_1 appartengono a $C_b([0,+\infty);X)$, ed esiste $C_{1,\alpha}$ indipendente da f e u_0 tale che

$$\|u_1\|_\infty + \|u_1'\|_\infty + \|Au_1\|_\infty \leq C_{1,\alpha}(\|u_0\| + \|Au_0\| + \|f\|_{C^\alpha}). \tag{4.7.5}$$

(ii) Per ogni $f \in C_b([0,+\infty);X)$, $u_2 \in C_b([0,+\infty);D(A))$, inoltre u_2 è derivabile, $u_2' \in C_b([0,+\infty);X)$, ed esiste C_2 indipendente da f tale che

$$\|u_2\|_\infty + \|u_2'\|_\infty + \|Au_2\|_\infty \leq C_2\|f\|_\infty. \tag{4.7.6}$$

Dimostrazione. (i) Sappiamo già che u_1 è continua, dato che $(I-P)f$ è continua e $(I-P)u_0 \in \overline{D(A)}$. C'è solo da dimostrare che è limitata. Per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\|u_1(t)\| &\leq M_\omega e^{-\omega t}\|(I-P)u_0\| + \int_0^t M_\omega e^{-\omega(t-s)}ds \sup_{0\leq s\leq t}\|(I-P)f(s)\| \\
&\leq M_\omega\|(I-P)\|\left(\|u_0\| + \frac{1}{\omega}\|f\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

Se $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$ allora $(I-P)u_0 \in D(A)$ e $A(I-P)u_0 + (I-P)f(0) \in \overline{D(A)}$; se $f \in C_b^\alpha([0,+\infty);X)$ allora anche $(I-P)f \in C_b^\alpha([0,+\infty);X)$. Per il Teorema 4.5.5(ii), $u_1 \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];X)$ per ogni $T > 0$ ed è soluzione stretta di (4.7.3).

Proviamo le stime (4.7.5). Per ogni $t \geq 0$ si ha[1]

$$\begin{aligned}
&\|Au_1(t)\| \leq M_\omega e^{-\omega t}\|(I-P)Au_0\| + \left\|A\int_0^t e^{(t-s)A}(I-P)(f(s)-f(t))ds\right\| \\
&+ \left\|A\int_0^t e^{sA}(I-P)f(t)ds\right\| \\
&\leq M_\omega\|(I-P)Au_0\| + M_\omega\int_0^t \frac{e^{-\omega(t-s)}}{(t-s)^{1-\alpha}}ds[(I-P)f]_{C^\alpha} + \|(e^{tA}-I)(I-P)f(t)\| \\
&\leq \|(I-P)\|\left(M_\omega(\|Au_0\| + \frac{\Gamma(\alpha)}{\omega^\alpha}[f]_{C^\alpha}\right) + (M_\omega+1)\|f\|_\infty).
\end{aligned}$$

---

[1]Ricordiamo che la funzione Γ di Eulero è data da

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt, \;\; \alpha > 0,$$

ed è un prolungamento regolare della successione $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(ii) Per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\|u_2(t)\| \leq N_\omega \int_t^\infty e^{\omega(t-s)} ds \sup_{s\geq 0} \|Pf(s)\| \leq \frac{N_\omega}{\omega} \|P\| \, \|f\|_\infty).$$

Analogamente, $\|Au_2(t)\| \leq \omega^{-1} N_\omega \|P\| \, \|f\|_\infty$. Inoltre,

$$u_2'(t) = Au_2(t) + Pf(t), \quad t \geq 0,$$

quindi

$$\sup_{t\geq 0} \|u_2'(t)\| + \sup_{t\geq 0} \|Au_2(t)\| \leq \left(\frac{3N_\omega}{\omega} + 1\right) \|P\| \, \|f\|_\infty.$$

■

Dal lemma 4.7.1 si deduce facilmente una condizione necessaria e sufficiente sui dati u_0, f affinché il problema (4.7.1) abbia soluzione limitata con valori in X in $[0, +\infty)$.

Proposizione 4.7.2. *Siano $f \in C_b([0, +\infty); X)$, $u_0 \in \overline{D(A)}$. Allora la soluzione mild u di (4.7.1) appartiene a $C_b([0, +\infty); X)$ se e solo se*

$$Pu_0 = -\int_0^{+\infty} e^{-sA} Pf(s) ds. \tag{4.7.7}$$

Nel caso che valga (4.7.7), si ha $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, ossia

$$u(t) = e^{tA}(I - P)u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(I - P)f(s)ds - \int_t^{+\infty} e^{(t-s)A} Pf(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{4.7.8}$$

Se in piú $f \in C_b^\alpha([0, +\infty); X)$, $u_0 \in D(A)$, $Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$, allora u appartiene anche a $C_b([0, +\infty); D(A))$.

Dimostrazione. Per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
u(t) &= (I - P)u(t) + Pu(t) \\
&= e^{tA}(I - P)u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(I - P)f(s)ds + e^{tA}Pu_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Pf(s)ds \\
&= u_1(t) + e^{tA}Pu_0 + \left(\int_0^{+\infty} - \int_t^{+\infty}\right) e^{(t-s)A} Pf(s)ds \\
&= u_1(t) + u_2(t) + e^{tA}\left(Pu_0 + \int_0^{+\infty} e^{-sA} Pf(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Le funzioni u_1 e u_2 sono limitate per il lemma 4.7.1, quindi u è limitata se e solo se la funzione $t \mapsto e^{tA}\left(Pu_0 + \int_0^{+\infty} e^{-sA} Pf(s)ds\right)$ è limitata. D'altra parte $y = Pu_0 + \int_0^{+\infty} e^{-sA} Pf(s)ds$ è un elemento di $P(X)$, quindi $e^{tA}y$ è limitata se e solo se $y = 0$, ossia vale (4.7.7).

Nel caso che valga (4.7.7), allora $u = u_1 + u_2$, cioè vale la (4.7.8). Il resto della proposizione segue dal lemma 4.7.1. ■

4.7.2 Soluzioni limitate in $(-\infty, 0]$

In questa sezione studiamo soluzioni retrograde del problema

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + g(t), & t \le 0, \\ \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{4.7.9}$$

con $g : (-\infty, 0] \mapsto X$ continua, $v_0 \in \overline{D(A)}$. Supporremo sempre che valga l'ipotesi (4.7.2).

Il problema è, in generale, mal posto, cioè non è detto che per tutte le g regolari e i dati finali v_0 soddisfacenti le condizioni di compatibilità necessarie, ci sia una soluzione. Vedremo in effetti che per trovare una soluzione si dovranno imporre delle condizioni molto restrittive sui dati. D'altra parte queste condizioni garantiranno buone proprietà di regolarità per le soluzioni.

Una funzione $v \in C((-\infty, 0]; X)$ è detta soluzione mild di (4.7.9) in $(-\infty, 0]$ se $v(0) = v_0$ e per ogni $a < 0$ si ha

$$v(t) = e^{(t-a)A}v(a) + \int_a^t e^{(t-s)A}g(s)ds, \quad a \le t \le 0. \tag{4.7.10}$$

In altre parole, v è soluzione mild di (4.7.9) se e solo se per ogni $a < 0$, posto $y = v(a)$, v è soluzione mild del problema

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + g(t), & a < t \le 0, \\ \\ v(a) = y, \end{cases} \tag{4.7.11}$$

e in piú $v(0) = v_0$.

Gli spazi $C_b((-\infty, 0]; X)$, $C_b^\alpha((-\infty, 0]; X)$ sono definiti in modo analogo al caso della semiretta $[0, +\infty)$.

Dati $g \in C_b((-\infty, 0]; X)$, $v_0 \in X$, poniamo

$$v_1(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}(I - P)g(s)ds, \quad t \le 0,$$

$$v_2(t) = e^{tA}Pv_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Pg(s)ds, \quad t \le 0.$$

Osserviamo che v_1 è soluzione mild del problema

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t) + (I - P)g(t), & t \le 0, \\ \\ w(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-sA}(I - P)g(s)ds, \end{cases}$$

mentre v_2 è soluzione mild, e anche stretta, del problema

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t) + Pg(t), & t \le 0, \\ \\ w(0) = Pv_0 \end{cases}$$

(vedi esercizio 7, §1.2.1).

Lemma 4.7.3. *Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) Per ogni $g \in C_b((-\infty,0];X)$ la funzione v_1 appartiene a $C_b((-\infty,0];X)$, e inoltre esiste $K_1 > 0$, indipendente da g, tale che

$$\|v_1\|_\infty \le K_1 \|g\|_\infty. \tag{4.7.12}$$

Se in piú $g \in C_b^\alpha((-\infty,0];X)$ per qualche $\alpha \in (0,1)$, allora $v_1 \in C_b^\alpha((-\infty,0];D(A))$, inoltre v_1 è derivabile, $v_1' \in C_b^\alpha((-\infty,0];X)$, ed esiste $K_{1,\alpha} > 0$, indipendente da g, tale che

$$\|v_1'\|_{C^\alpha} + \|Av_1\|_{C^\alpha} \le K_{1,\alpha}\|g\|_{C^\alpha}. \tag{4.7.13}$$

(ii) Per ogni $g \in C_b((-\infty,0];X)$ e per ogni $v_0 \in X$, la funzione v_2 appartiene a $C_b((-\infty,0];D(A)) \cap C_b^1((-\infty,0];X)$; inoltre esiste $K_2 > 0$, indipendente da g e da v_0, tale che

$$\|v_2\|_\infty + \|v_2'\|_\infty + \|Av_2\|_\infty \le K_2(\|v_0\| + \|g\|_\infty). \tag{4.7.14}$$

Dimostrazione. (i) Che v_1 sia continua in $(-\infty,0]$ con valori in X si può vedere in vari modi, per es. osservando che per $a \le t \le 0$ si ha $v_1(t) = e^{(t-a)A}v_1(a) + \int_a^t e^{(t-s)A}(I-P)g(s)ds$, e sappiamo che il primo addendo è continuo in $(a,+\infty)$ e il secondo lo è in $[a,0]$; dato che a è arbitrario v_1 è continua in $(-\infty,0]$.

Dimostriamo che v_1 è limitata. Per ogni $t \le 0$ si ha

$$\|v_1(t)\| \le M_\omega \int_{-\infty}^t e^{-\omega(t-s)}ds \sup_{s\le 0}\|(I-P)g(s)\| \le \frac{M_\omega}{\omega}\|I-P\|\,\|g\|_\infty.$$

Ora osserviamo che per ogni $y \in (I-P)(X)$, si ha

$$A\int_0^{+\infty} e^{\sigma A}y\,d\sigma = -y. \tag{4.7.15}$$

Infatti, $\int_0^{+\infty} e^{\sigma A}y\,d\sigma = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{\sigma A}y\,d\sigma$, e $A\int_0^t e^{\sigma A}y\,d\sigma = e^{tA}y - y$ tende a $-y$ per $t \to +\infty$. Dato che A è chiuso, la formula segue. Oppure, usiamo il fatto che $\int_0^{+\infty} e^{\sigma A}y\,d\sigma = R(0,A_0)y$ dove A_0 è la parte di A in $(I-P)(X)$, e $A_0R(0,A_0) = -I$ su $(I-P)(X)$.

Usiamo la formula (4.7.15) per studiare il caso in cui $g \in C_b^\alpha((-\infty, 0]; X)$. In questo caso, $v_1(t) \in D(A)$, e si ha

$$\begin{aligned}
\|Av_1(t)\| &\leq \left\|\int_{-\infty}^t Ae^{(t-s)A}(I-P)(g(s)-g(t))ds\right\| \\
&\quad + \left\|\int_{-\infty}^t Ae^{(t-s)A}(I-P)g(t)ds\right\| \\
&\leq M_\omega \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\omega(t-s)}}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds[(I-P)g]_{C^\alpha} + \left\|A\int_0^{+\infty} e^{\sigma A}(I-P)g(t)d\sigma\right\| \\
&\leq M_\omega \frac{\Gamma(\alpha)}{\omega^\alpha}\|I-P\|\,[g]_{C^\alpha} + \|-(I-P)g(t)\| \\
&\leq \|I-P\|\left(M_\omega \frac{\Gamma(\alpha)}{\omega^\alpha} + \|g\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

La dimostrazione del fatto che $Av_1 \in C^\alpha((-\infty, 0]; X)$ è simile a questa e a quella del teorema 4.5.5, ed è lasciata per esercizio.

Dimostriamo (ii). Per ogni $t \leq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\|v_2(t)\| &\leq N_\omega e^{\omega t}\|Pv_0\| + N_\omega \left|\int_0^t e^{\omega(t-s)ds}\right| \sup\nolimits_{s\leq 0}\|Pg(s)\| \\
&\leq N_\omega\left(\|Pv_0\| + \frac{1}{\omega}\|P\|\,\|g\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene $\|Av_2(t)\| \leq N_\omega(\|Pv_0\| + \omega^{-1}\|P\|\,\|g\|_\infty)$. Essendo inoltre $v_2' = Av_2 + Pg$, la maggiorazione (4.7.14) segue. ∎

Il lemma 4.7.3 ci permette di dare una condizione necessaria e sufficiente sui dati g, u_0 affinché il problema (4.7.9) abbia una soluzione mild limitata in $(-\infty, 0]$ con valori in X.

Proposizione 4.7.4. *Siano $g \in C_b((-\infty, 0]; X)$, $v_0 \in X$. Allora il problema (4.7.9) ha una soluzione mild $v \in C_b((-\infty, 0]; X)$ se e solo se*

$$(I-P)v_0 = \int_{-\infty}^0 e^{-sA}(I-P)g(s)ds. \tag{4.7.16}$$

Nel caso che valga la (4.7.16), la soluzione limitata è unica, ed è data da

$$v(t) = e^{tA}Pv_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Pg(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}(I-P)g(s)ds, \quad t \leq 0. \tag{4.7.17}$$

Se in piú $g \in C^\alpha((-\infty, 0]; X)$ per qualche $\alpha \in (0,1)$, allora v è soluzione stretta ed appartiene a $C^\alpha((-\infty, 0]; D(A))$, v' appartiene a $C^\alpha((-\infty, 0]; X)$.

Dimostrazione. Supponiamo che (4.7.9) abbia una soluzione mild v limitata. Allora per ogni $a < 0$ e per ogni $t \in [a, 0]$ si ha

$$\begin{aligned} v(t) &= (I-P)v(t) + Pv(t) \\ &= e^{(t-a)A}(I-P)v(a) + \int_a^t e^{(t-s)A}(I-P)g(s)ds + Pv(t) \\ &= e^{(t-a)A}(I-P)v(a) + \left(\int_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^a\right) e^{(t-s)A}(I-P)g(s)ds + Pv(t) \\ &= e^{(t-a)A}\left((I-P)v(a) + \int_{-\infty}^a e^{(a-s)A}(I-P)g(s)ds\right) + v_1(t) + Pv(t) \\ &= e^{(t-a)A}((I-P)v(a) + v_1(a)) + v_1(t) + Pv(t). \end{aligned}$$

Grazie al lemma 4.7.3, $\sup_{a \le 0} \|v_1(a)\| < \infty$, inoltre per ipotesi si ha che $\sup_{a \le 0} \|(I - P)v(a)\| < \infty$. Facendo tendere a a $-\infty$ si ottiene

$$v(t) = v_1(t) + Pv(t), \quad t \le 0.$$

D'altra parte, Pv è soluzione mild, e anche stretta, del problema

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t) + Pg(t), & a < t \le 0, \\ \\ w(a) = Pv(a), \end{cases}$$

ed essendo $Pv(0) = Pv_0$, si ha, per $t \le 0$ (cfr. esercizio 7, §1.2.1),

$$Pv(t) = e^{tA}Pv_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Pg(s)ds = v_2(t),$$

per cui $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, e vale la (4.7.17). In particolare, $(I - P)v(t) = v_1(t)$, e per $t = 0$ otteniamo la (4.7.16).

Viceversa, per il lemma 4.7.3 la funzione v definita dalla formula (4.7.17) appartiene a $C_b((-\infty, 0]; X)$, ed è soluzione mild di $v' = Av + g$, come abbiamo già osservato. Se inoltre vale la (4.7.16) si ha $v(0) = Pv_0 + \int_{-\infty}^0 e^{-sA}(I-P)g(s)ds = Pv_0 + (I-P)v_0 = v_0$.

L'ultima affermazione segue ancora dal lemma 4.7.3. ■

4.7.3 Soluzioni limitate in R

Studiamo ora l'esistenza e le proprietà di soluzioni limitate su $\mathbb{R}$ dell'equazione

$$z'(t) = Az(t) + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.7.18}$$

dove $h : \mathbb{R} \mapsto X$ è continua e limitata. Supporremo ancora che valga (4.7.2). Useremo gli spazi di Banach $C_b(\mathbb{R}; X)$, $C^\alpha(\mathbb{R}; X)$, definiti come nel caso delle semirette.

Una funzione $z \in C_b(\mathbb{R}; X)$ è detta soluzione mild di (4.7.18) in $\mathbb{R}$ se per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$z(t) = e^{(t-a)A} z(a) + \int_a^t e^{(t-s)A} h(s) ds, \quad t \geq a, \tag{4.7.19}$$

ovvero se per ogni $a < 0$, posto $z(a) = \overline{z}$, z è soluzione mild del problema

$$\begin{cases} z'(t) = Av(t) + h(t), \quad t > a, \\ \\ z(a) = \overline{z}. \end{cases} \tag{4.7.20}$$

Proposizione 4.7.5. *Per ogni $h \in C_b(\mathbb{R}; X)$, il problema (4.7.18) ha un'unica soluzione mild $z \in C_b(\mathbb{R}; X)$, data da*

$$z(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A} (I - P) h(s) ds - \int_t^\infty e^{(t-s)A} P h(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.7.21}$$

se in piú $h \in C^\alpha(\mathbb{R}; X)$ per qualche $\alpha \in (0, 1)$, allora z è soluzione stretta e appartiene a $C^\alpha(\mathbb{R}; D(A))$.

Dimostrazione. Sia z una soluzione mild appartenente a $C_b(\mathbb{R}; X)$, e sia $z(0) = z_0$. La restrizione di z a $[0, +\infty)$ è soluzione mild di (4.7.1) con $u_0 = z_0$ e appartiene a $C_b([0, +\infty); X)$; per la proposizione 4.7.2 dovrà essere

$$P z_0 = -\int_0^{+\infty} e^{-sA} P h(s) ds.$$

La restrizione di z a $(-\infty, 0])$ è soluzione mild di (4.7.9) con $v_0 = z_0$ e appartiene a $C_b((-\infty, 0]); X)$; per la proposizione 4.7.4 dovrà essere,

$$(I - P) z_0 = \int_{-\infty}^0 e^{-sA} (I - P) h(s) ds.$$

Sempre per la proposizione 4.7.2 avremo, per $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{tA} \int_{-\infty}^0 e^{-sA} (I - P) h(s) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{(t-s)A} (I - P) h(s) ds - \int_t^{+\infty} e^{(t-s)A} P h(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A} (I - P) h(s) ds - \int_t^{+\infty} e^{(t-s)A} P h(s) ds. \end{aligned}$$

Inoltre, per la proposizione 4.7.4 avremo, per $t \leq 0$,

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{tA}\left(-\int_0^{\infty} e^{-sA}Ph(s)ds\right) \\ &\quad + \int_0^t e^{(t-s)A}Ph(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}(I-P)h(s)ds \\ &= -\int_t^{+\infty} e^{(t-s)A}Ph(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}(I-P)h(s)ds, \end{aligned}$$

quindi vale la (4.7.21). D'altra parte, per i lemmi 4.7.1 e 4.7.3 (con ovvie modifiche: i due lemmi riguardano funzioni definite su semirette, in questo caso il dominio è $\mathbb{R}$), la funzione z data dalla (4.7.21) appartiene a $C_b(\mathbb{R}; X)$, e si verifica facilmente che è soluzione mild. Infatti abbiamo, per $a \leq t$

$$\begin{aligned} z(t) &= \left(\int_{-\infty}^a + \int_a^t\right)e^{(t-s)A}(I-P)h(s)ds - \left(\int_a^{+\infty} - \int_a^t\right)e^{(t-s)A}Ph(s)ds \\ &= e^{(t-a)A}\int_{-\infty}^a e^{(a-s)A}(I-P)h(s)ds + \int_a^t e^{(t-s)A}(I-P)h(s)ds \\ &\quad -e^{(t-a)A}\int_a^{+\infty} e^{(a-s)A}Ph(s)ds + \int_a^t e^{(t-s)A}Ph(s)ds \\ &= e^{(t-a)A}z(a) + \int_a^t e^{(t-s)A}h(s)ds. \end{aligned}$$

Se in più $h \in C^{\alpha}(\mathbb{R}; X)$, allora $z \in C^{\alpha}(\mathbb{R}; X)$, sempre per i lemmi 4.7.1 e 4.7.3. ■

Osservazione 4.7.6. Si verifica facilmente che

(i) se h è costante, allora z è costante;

(ii) se $\lim_{t\to+\infty} h(t) = h_{\infty}$ (rispettivamente, $\lim_{t\to-\infty} h(t) = h_{-\infty}$) allora

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = \int_0^{+\infty} e^{sA}(I-P)h_{\infty}ds - \int_{-\infty}^0 e^{sA}Ph_{\infty}ds$$

(rispettivamente, la stessa cosa con $+\infty$ sostituito da $-\infty$);

(iii) se h è T-periodica, allora z è T-periodica.

Per la dimostrazione di queste affermazioni, conviene cambiare variabile ponendo $t-s=\sigma$ nei due integrali che compaiono nell'espressione di z, ottenendo

$$z(t) = \int_0^{+\infty} e^{\sigma A}(I-P)h(t-\sigma)d\sigma - \int_{-\infty}^0 e^{\sigma A}Ph(t-\sigma)d\sigma, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.7.4 Soluzioni con crescita o decadimento esponenziale

L'ipotesi (4.7.2) è sostituita da

$$\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \omega\} = \emptyset, \tag{4.7.22}$$

per qualche $\omega \in \mathbb{R}$. In particolare, la (4.7.22) è soddisfatta da ogni $\omega > \omega_A$. Se I è uno dei tre insiemi $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, $\mathbb{R}$, poniamo

$$C_\omega(I; X) = \{f : I \mapsto X \text{ continue} |\, \|f\|_{C_\omega} := \sup_{t \in I} \|e^{-\omega t} f(t)\| < \infty\},$$

e per $\alpha \in (0, 1)$

$$C^\alpha_\omega(I; X) = \{f : I \mapsto X |\, t \mapsto e^{-\omega t} f(t) \in C^\alpha(I; X)\},$$

$$\|f\|_{C^\alpha_\omega} = \sup_{t \in I} \|e^{-\omega t} f(t)\| + \sup_{t,s \in I,\, t \neq s} \frac{\|e^{-\omega t} f(t) - e^{-\omega s} f(s)\|}{|t - s|^\alpha}.$$

Siano $f \in C_\omega([0, +\infty); X)$, $g \in C_\omega((-\infty, 0]; X)$, $h \in C_\omega(\mathbb{R}; X)$. Si verifica facilmente che i problemi (4.7.1), (4.7.9), (4.7.18) hanno soluzioni mild $u \in C_\omega([0, +\infty); X)$, $v \in C_\omega((-\infty, 0]; X)$, $z \in C_\omega(\mathbb{R}; X)$ se e solo se i problemi

$$\begin{cases} \tilde{u}'(t) = (A - \omega I)\tilde{u}(t) + e^{-\omega t} f(t), & t > 0, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.7.23}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}'(t) = (A - \omega I)\tilde{v}(t) + e^{-\omega t} g(t), & t \leq 0, \\ \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{4.7.24}$$

$$\tilde{z}'(t) = (A - \omega I)\tilde{z}(t) + e^{-\omega t} h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.7.25}$$

hanno soluzioni mild $\tilde{u} \in C_b([0, +\infty); X)$, $\tilde{v} \in C_b((-\infty, 0]; X)$, $\tilde{z} \in C_b(\mathbb{R}; X)$, e in questo caso si ha $u(t) = e^{\omega t}\tilde{u}(t)$, $v(t) = e^{\omega t}\tilde{v}(t)$, $z(t) = e^{\omega t}\tilde{z}(t)$. D'altra parte l'operatore $\tilde{A} = A - \omega I : D(A) \mapsto X$ è settoriale e verifica l'ipotesi (4.7.2), quindi tutti i risultati delle sezioni precedenti sono applicabili ai problemi (4.7.23), (4.7.24), (4.7.25). Notiamo che la proiezione spettrale P negli enunciati precedenti è quella relativa all'operatore $\tilde{A}$, e quindi

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} R(\lambda, A - \omega I) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ + \omega} R(z, A) dz, \tag{4.7.26}$$

dove la curva $\gamma_+ + \omega$ circonda $\sigma^\omega_+ := \{\lambda \in \sigma(A) : \ \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$, ed è contenuta nel semipiano $\{\operatorname{Re}\lambda > \omega\}$. Poniamo inoltre $\sigma^\omega_- := \{\lambda \in \sigma(A) : \ \operatorname{Re}\lambda < \omega\}$. Osserviamo che se $\omega \geq \omega_A$ allora $P = 0$.

Applicando i risultati delle sezioni precedenti otteniamo i seguenti teoremi.

Teorema 4.7.7. *Nell'ipotesi (4.7.22), sia P definita da (4.7.26). Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) *Se $f \in C_\omega([0,+\infty);X)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$, la soluzione mild u del problema (4.7.1) appartiene a $C_\omega([0,+\infty);X)$ se e solo se vale*

$$Pu_0 = -\int_0^{+\infty} e^{-s(A-\omega I)}e^{-\omega s}Pf(s)ds,$$

ossia[2]

$$Pu_0 = -\int_0^{+\infty} e^{-sA}Pf(s)ds.$$

In questo caso, u è data da (4.7.8), ed esiste $C_1 = C_1(\omega)$ tale che

$$\|u\|_{C_\omega([0,+\infty);X)} \le C_1(\|u_0\| + \|f\|_{C_\omega([0,+\infty);X)}).$$

Se in piú $f \in C^\alpha_\omega([0,+\infty);X)$ per qualche $\alpha \in (0,1)$, $u_0 \in D(A)$, $Au_0+f(0) \in \overline{D(A)}$, allora $u \in C_\omega([0,+\infty);D(A))$, ed esiste $C_1' = C_1'(\omega,\alpha)$ tale che

$$\|u\|_{C_\omega([0,+\infty);D(A))} \le C_1(\|u_0\|_{D(A)} + \|f\|_{C^\alpha_\omega([0,+\infty);X)}).$$

(ii) *Se $g \in C_\omega((-\infty,0];X)$ e $v_0 \in X$, il problema (4.7.9) ha una soluzione mild $v \in C_\omega((-\infty,0];X)$ se e solo se vale (4.7.16). In questo caso v è unica ed è data dalla formula (4.7.17). Esiste $C_2 = C_2(\omega)$ tale che*

$$\|v\|_{C_\omega((-\infty,0];X)} \le C_2(\|v_0\| + \|g\|_{C_\omega((-\infty,0];X)}).$$

Se in piú $g \in C^\alpha_\omega((-\infty,0];X)$ per qualche $\alpha \in (0,1)$, allora $v \in C^\alpha_\omega((-\infty,0];D(A))$ ed esiste $C_2' = C_2'(\omega,\alpha)$ tale che

$$\|v\|_{C^\alpha_\omega((-\infty,0];D(A))} \le C_2'(\|v_0\| + \|g\|_{C^\alpha_\omega((-\infty,0];X)}).$$

(iii) *Se $h \in C_\omega(\mathbb{R};X)$, il problema (4.7.18) ha un'unica soluzione mild $z \in C_\omega(\mathbb{R};X)$, data dalla formula (4.7.21), ed esiste $C_3 = C_3(\omega)$ tale che*

$$\|z\|_{C_\omega(\mathbb{R};X)} \le C_3\|h\|_{C_\omega(\mathbb{R};X)}.$$

Se in piú $h \in C^\alpha_\omega(\mathbb{R};X)$ per qualche $\alpha \in (0,1)$, allora $z \in C^\alpha_\omega(\mathbb{R};D(A))$ ed esiste $C_3' = C_3'(\omega,\alpha)$ tale che

$$\|x\|_{C^\alpha_\omega(\mathbb{R};D(A))} \le C_3'\|h\|_{C^\alpha_\omega(\mathbb{R};X)}.$$

Osservazione 4.7.8. Abbiamo considerato finora spazi di Banach complessi; inoltre gli operatori e^{tA}, P, ecc., sono tutti definiti mediante integrali su cammini in $\mathbb{C}$.

Se X è uno spazio di Banach reale, e $A : D(A) \subset X \mapsto X$ è un operatore lineare chiuso, conviene considerare comunque spettro e risolvente complessi, definendo le complessificazioni di X e di A come nel capitolo 2. Nel caso che la complessificazione $\tilde{A}$ di A

[2] Notiamo che, essendo σ^ω_+ limitato, $e^{tA}P$ è ben definito anche per $t < 0$, e valgono i risultati della proposizione 4.6.3, con ovvie modifiche. Cfr. esercizio 3, §4.6.2

sia settoriale e generi il semigruppo analitico $e^{t\tilde{A}}$ in $\tilde{X}$, la restrizione $e^{t\tilde{A}}{}_{|X}$ manda X in sé per ogni $t \geq 0$. Per dimostrarlo, conviene modificare il cammino $\gamma_{r,\eta}$ e trasformarlo in un cammino $\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \omega' + \rho e^{\pm i\theta},\ \rho \geq 0\}$, con $\omega' > \omega$, percorso come al solito in senso antiorario. Si ottiene cosí per ogni $x \in X$,

$$e^{t\tilde{A}}x = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{\omega' t}\left(e^{i\theta+\rho t e^{i\theta}}R(\rho e^{i\theta}, A) - e^{-i\theta+\rho t e^{-i\theta}}R(\rho e^{-i\theta}, A)\right)d\rho\, x,\quad t > 0.$$

Si verifica poi che la parte reale della funzione integranda è identicamente nulla, e quindi $e^{t\tilde{A}}x$ appartiene a X.

Le stesse considerazioni valgono per le proiezioni P e $I - P$. Conviene prendere come γ_+ una circonferenza $C = \{\omega' + re^{i\eta} : \eta \in [0, 2\pi]\}$ con centro ω' sull'asse reale. Per ogni $x \in X$ si ha

$$Px = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{i\eta}R(\omega' + re^{i\eta}, A)x\, d\eta$$

$$= \frac{r}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(e^{i\eta}R(\omega' + re^{i\eta}, A) - e^{-i\eta}R(re^{-i\eta}, A)x\right)d\eta,$$

e la funzione integranda ha parte immaginaria identicamente nulla. Quindi $P(X) \subset X$, e di conseguenza $(I - P)(X) \subset X$.

Esempio 4.7.9. Consideriamo l'equazione del calore non omogenea

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(t,x), & t > 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{4.7.27}$$

con $f : [0, +\infty) \times [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ continua, u_0 continua e nulla in 0 e in π. Scegliamo come al solito $X = C([0, \pi])$, $A : D(A) = \{f \in C^2([0, \pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\} \mapsto X$, $Au = u''$ (cfr. esempio 4.6.6, con $\alpha = 0$). Essendo $\omega_A = -1$, vale l'ipotesi (4.7.2), e in questo caso $P = 0$. La proposizione 4.7.2 ci garantisce allora che per ogni f continua e limitata e per ogni $u_0 \in C([0, \pi])$, tale che $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$, la soluzione di (4.7.27) è limitata.

Per quanto riguarda le soluzioni con decadimento esponenziale, usiamo il teorema 4.7.7(i). Fissato $\omega \neq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda = -\omega\} = \emptyset$. Se f è continua tale che

$$\sup_{t \geq 0,\, 0 \leq x \leq \pi} |e^{\omega t}f(t,x)| < \infty$$

allora la soluzione mild u di (4.7.27) è tale che

$$\sup_{t \geq 0,\, 0 \leq x \leq \pi} |e^{\omega t}u(t,x)| < \infty$$

se e solo se vale la (4.7.7), ossia (cfr. esempio 4.6.6)

$$\int_0^{\pi} u_0(x)\sin kx\, dx = -\int_0^{+\infty} e^{k^2 s}\int_0^{\pi} f(s,x)\sin kx\, dx\, ds,$$

per ogni numero naturale k tale che $k^2 < \omega$. (Osserviamo che essendo $A \sin kx = -k^2 \sin kx$, si ha $e^{tA} \sin kx = e^{-tk^2} \sin kx$, per ogni $t \in \mathbb{R}$).

Consideriamo ora il problema retrogrado

$$\begin{cases} v_t(t,x) = v_{xx}(t,x) + g(t,x), \quad t < 0, \ 0 \le x \le \pi, \\ \\ v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0, \quad t \le 0, \end{cases} \tag{4.7.28}$$

a cui applichiamo i risultati della proposizione 4.7.4. Essendo $P = 0$, se $g : (-\infty, 0] \times [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ è continua e limitata, c' è solo un dato finale v_0 per cui la soluzione è limitata, ed è dato da (vedi la formula (4.7.16))

$$v_0(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sA} g(s,\cdot) ds(x), \quad 0 \le x \le \pi.$$

Una conclusione analoga vale, grazie al teorema 4.7.7(i), se g è continua e decade esponenzialmente,

$$\sup_{t \le 0,\, 0 \le x \le \pi} |e^{-\omega t} g(t,x)| < \infty$$

con $\omega > 0$.

Consideriamo il problema su tutto $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} z_t(t,x) = z_{xx}(t,x) + h(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \ 0 \le x \le \pi, \\ \\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.7.29}$$

Grazie alla proposizione 4.7.5, per ogni $h : \mathbb{R} \times [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata, il problema ha un'unica soluzione mild limitata, data da

$$z(t,x) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} h(s,\cdot) ds(x), \quad t \in \mathbb{R}, \ 0 \le x \le \pi.$$

Valgono le considerazioni dell'osservazione 4.7.6: in particolare, se h è T-periodica rispetto al tempo, allora lo è anche z; se h dipende solo da x anche z è indipendente dal tempo, e si ha (vedi esercizio 1, §4.7.5)

$$z(t,x) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} h(\cdot) ds(x) = (-A^{-1}h)(x),$$

e l'espressione esplicita di $A^{-1}h$ si calcola facilmente risolvendo l'equazione differenziale ordinaria $f'' = h$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

4.7.5 Esercizi

1) Sia A un operatore settoriale. Provare che se $\omega_A < 0$ allora

$$\int_0^{+\infty} e^{tA} dt = -A^{-1}.$$

Piú in generale, provare che qualunque sia ω_A, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_A$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{tA} dt = R(\lambda, A).$$

2) Siano α, $\beta \in \mathbb{R}$ e sia A la realizzazione della derivata seconda in $C([0,1])$, con dominio $\{f \in C^2([0,1]) : \alpha f(i) + \beta f'(i) = 0,\ i = 0,1\}$. Trovare ω_A.

3) Sia A un operatore settoriale tale che $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, con σ_1 compatto, σ_2 chiuso. Sia P l'operatore definito da

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda, A) d\lambda,$$

dove γ è una curva regolare chiusa contenuta in $\rho(A)$, che circonda σ_1, orientata in senso antiorario, con indice 1 rispetto a ogni punto di σ e con indice 0 rispetto a ogni punto di $\sigma(A) \setminus \sigma_1$.

Dimostrare che la parte A_1 di A in $P(X)$ (che appartiene a $\mathcal{L}(P(X))$, cfr. esercizio 7, §2.2.1) genera il gruppo

$$e^{tA_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda,$$

per cui per ogni $x \in P(X)$ e per ogni $t \geq 0$ si ha

$$e^{tA} x = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) x \, d\lambda.$$

4) Sia A un operatore settoriale tale che $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, e sia $g \in C_b^\alpha((-\infty, 0]; X)$ con $0 < \alpha < 1$. Dimostrare che la funzione $v_1(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}(I - P)g(s)ds$, dove P è la proiezione spettrale definita in (4.6.5), è derivabile e $v_1' = Av_1 + (I - P)g$. (Questo è una parte dell'enunciato della Proposizione 4.7.4).

Bibliografia

[1] S. Agmon: *On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 119-147.

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg: *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[3] H. Brezis: *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York (1973).

[4] H. Brezis: *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris (1983). Traduzione inglese *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext. Springer, New York, (2011)

[5] Ph. Clemént et Al.: *One-parameter Semigroups*, North-Holland, Amsterdam (1987).

[6] N. Dunford, J. Schwarz: *Linear Operators*, Wyley, Interscience, New York (1958).

[7] K. Engel, R. Nagel: *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Spinger Verlag, Berlin (1999).

[8] K. Engel, R. Nagel: *A Short Course on Operator Semigroups*, Spinger Verlag, Berlin (2006).

[9] J. Goldstein: *Semigroups of Operators and Applications*, Oxford University Press (1985).

[10] A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1983).

[11] H.B. Stewart: *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **199** (1974), 141-162.

[12] H.B. Stewart: *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), 299-310.

[13] E.C. Titchmarsh: *The Theory of Functions*, 2nd Edition, Oxford Univ. Press (1988).

[14] H. Triebel: *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[15] A. Zygmund: *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press., 2nd Edition Reprinted (1968).