$f(x) = e^x = \sup\{e^q : q \in \mathbb{Q} \quad q \leq x\}$

e^x f.ne crescente strettamente

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$e^0 = 1$

$\exists \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

Dimostrato a Teoria

Esercizio

1) $\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ ovvero e^x continua in 0

2) $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$ " " " " $x_0 \in \mathbb{R}$

3) $\lim_{x \to 0} [\log(1+x)] \cdot \frac{1}{x} = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

5) $\exists k > 0 : \quad e^n \geq k \cdot n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

7) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

dim

1) $e^x \nearrow \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} e^x = \sup\{e^x : x \leq 0\} = \inf\{e^x : x \geq 0\}$

per il Teorema sui limiti delle funzioni monotone

Inoltre, poiché $\exists \lim_{x \to 0} e^x = \ell$ allora per il Teorema sui limiti di funzioni via limiti di successioni si ha

$\forall (x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} e^{x_n} = \ell$

Ma noi sappiamo che $\lim_{n \to +\infty} e^{1/n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{e} = 1$

e quindi

$\lim_{x \to 0} e^x = 1$

2) $e^x - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{x - x_0} - 1)$ ed ora $\lim_{x \to x_0} e^{x - x_0} = \lim_{y \to 0} e^y = 1$

da cui $\lim_{x \to x_0} e^{x_0}(e^{x - x_0} - 1) = 0$ da cui $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$

3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$ quando f continua in x_0 p.d.e. **2**

e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \underset{y=e^x-1}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

5) $e^n = (1+(e-1))^n \geq 1+n(e-1) > 1+n$ poichè $e>2 \Rightarrow e-1>1$

$$\Rightarrow \left(e^{n/2}\right)^2 > \left(1+\frac{n}{2}\right)^2 = 1+n+\frac{n^2}{4} > \frac{1}{4}\cdot n^2$$

$$\left(e^{n/3}\right)^3 > \left(1+\frac{n}{3}\right)^3 = \dots > \frac{1}{27}n^3 \quad \text{etc}$$

6) $\left(e^x \nearrow \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} e^x = \ell\right)$, inoltre $\left(\lim_{n\to+\infty} e^n > \lim_{n\to+\infty}(1+n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty\right)$

$\Rightarrow$ per il Teorema che lega limiti di funzioni a limiti successioni

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

7) $$e^{x-x} = e^0 = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1/e^x \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

Oss: $e^x \nearrow \Rightarrow \ln x \nearrow$

$e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow \ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$

$e^0 = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$

Cambiamento di base

Siano $a, b > 0$, $a, b \neq 1$

$$\log_a(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_b(x)\,\log_a(b)$$

e dunque, dividendo per $\log_a(b)$

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}}$$

Si osserva poi che, prendendo $x=a$, si trova

$$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$$

Ad esempio: $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

da cui segue, se $x=1000$

$$\log_{10}(1000) = 3 = \frac{\ln(1000)}{\ln(10)} \quad \text{ovvero} \quad \ln(1000) = 3\ln(10)$$

Esercizio Calcolare $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \quad \forall \alpha>0$

dim

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \underset{t=-\ln x}{=} \lim_{t\to+\infty} (e^{-t})^\alpha \cdot (-t) = -\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(e^t)^\alpha} = -0 = 0^-$$

poiché $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^{1/\alpha}} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{\alpha t}}{t}\right)^{1/\alpha} = \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{t}\right)^{1/\alpha} = (0)^{1/\alpha} = 0 \quad \forall \alpha>0$

$$e^x \geq e^{\lfloor x \rfloor} \geq 1+\lfloor x \rfloor \geq 1+(x-1) \implies e^x \geq \frac{1}{e}(1+x)$$

da cui segue che $\exists k>0 : \; e^x \geq k\, x^\alpha \quad \forall \alpha>0$

" " " $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha>0$

$\blacksquare$

Esercizio Calcolare $\lim_{x\to 0} \left[\log_a(x+2) - \log_a(2)\right] \cdot \frac{1}{x} \quad a>0, a\neq 1$

dim

$$\left[\log_a(x+2) - \log_a(2)\right] \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_a\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \log_a e$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln(a^2)}$$

$\blacksquare$

Grafici di Funzioni

Data il grafico della funzione f(x), disegnare

$f(x+k)$

$f(x)+k$

$f(kx)$

$f(x) = x^3 - x$

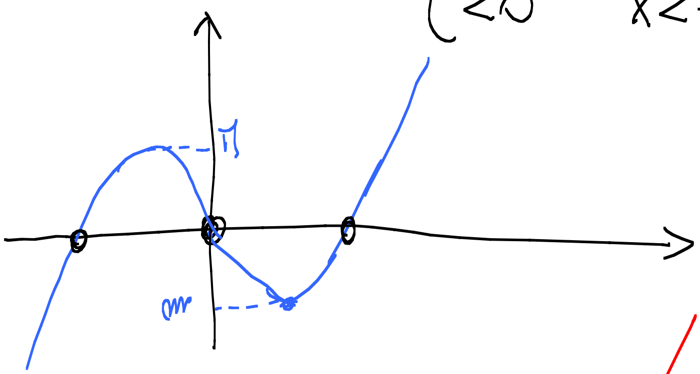
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \cdot 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty \cdot 1$

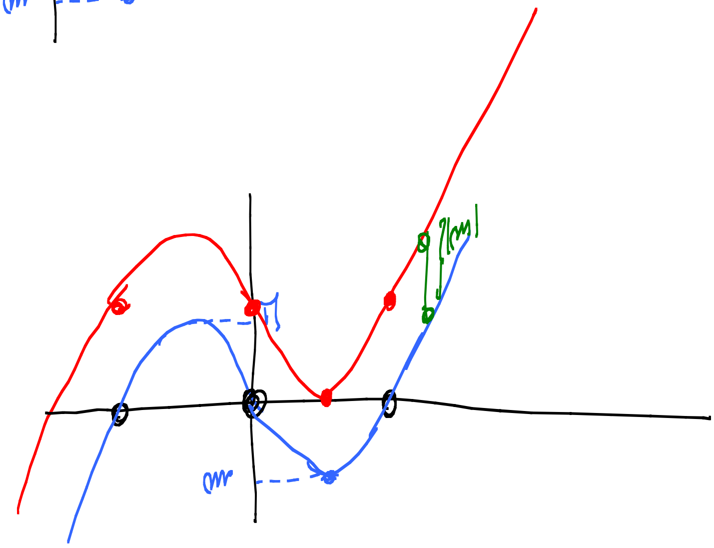
$f(x) = -f(-x)$ ovvero f è dispari

f è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = x(x-1)(x+1) \begin{cases} >0 & -1<x<0 \text{ o } 1<x \\ <0 & x<-1 \text{ o } 0<x<1 \end{cases}$



$f(x) + |m|$



$g(x)=f(x+1)$

$x=-1 \longrightarrow f(-1+1)=g(-1)$

$x=0 \longrightarrow f(0+1)=g(0)$

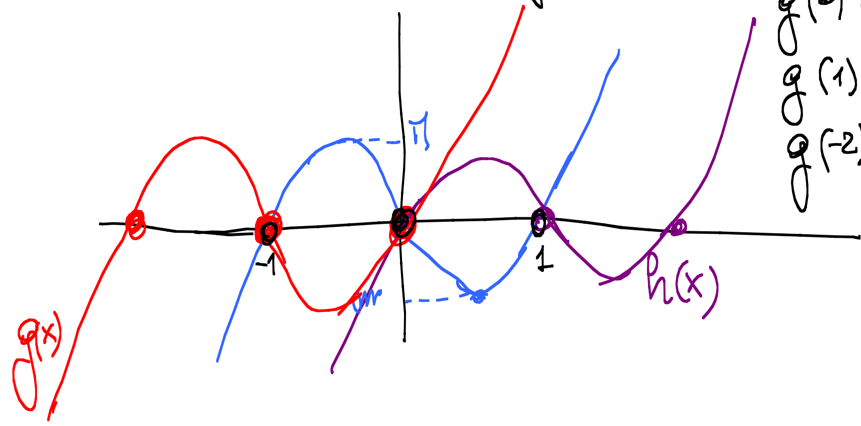
$x=1 \longrightarrow f(1+1)=g(1)$

$g(-1)=f(0)=0$

$g(0)=f(1)=0$

$g(1)=f(2)$

$g(-2)=f(-1)=0$



$h(x)=f(x-1)$

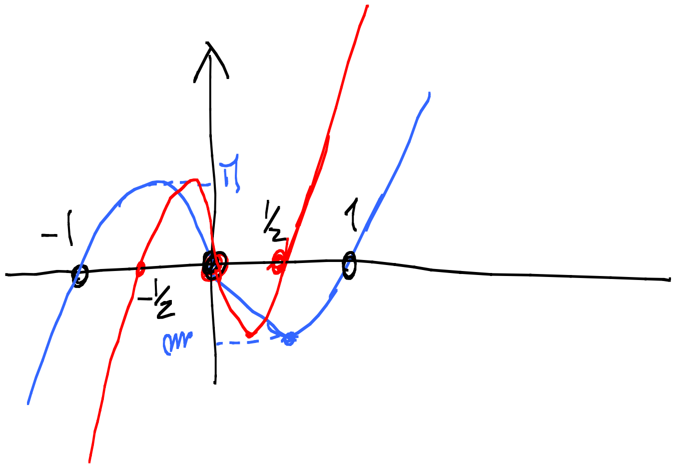
$h(0)=f(-1)=0 \quad h(1)=f(0)=0 \quad h(2)=f(1)=0$

$q(x)=f(2x)$

$q(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(1)=0$

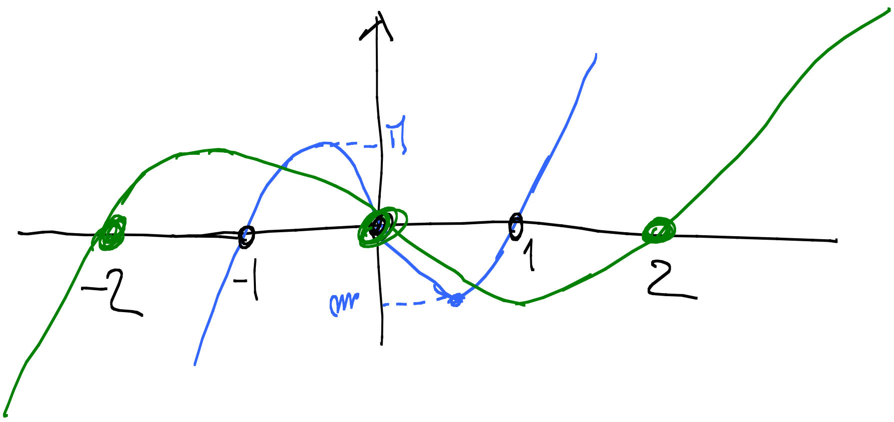
$q(0)=f(\frac{1}{2}\cdot 0)=f(0)=0$

$q(-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2}\cdot 2)=f(-1)=0$



$p(x)=f(\frac{x}{2})$

$p(2)=f(1)=0 \quad p(0)=f(0)=0 \quad p(-2)=f(-1)=0$



Funzioni periodiche

Def $f: A \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T>0$ se

i) $\forall x \in A \quad x+T \in A$
ii) $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A$

Oss: se f ha periodo T allora ha periodo kT $\forall k \in \mathbb{N}$

viceversa

se f ha periodo $T \not\Rightarrow \frac{T}{k}$ sia ancora un periodo

$f = \operatorname{sen} x$ ha periodo $T = 2\pi$
però
$f(x+\pi) = \operatorname{sen}(x+\pi) \neq \operatorname{sen} x$ (ovvero $\frac{T}{2}$ non è periodo)

$$T_{min} = \min \{ T : f(x+T) = f(x) \ \forall x \in A \}$$

Pb: esiste sempre T_{min}? NO, poiché

$f(x) = 5$ è periodica di periodo T $\forall T > 0$

Data $f(x)$ periodica di periodo $T>0$

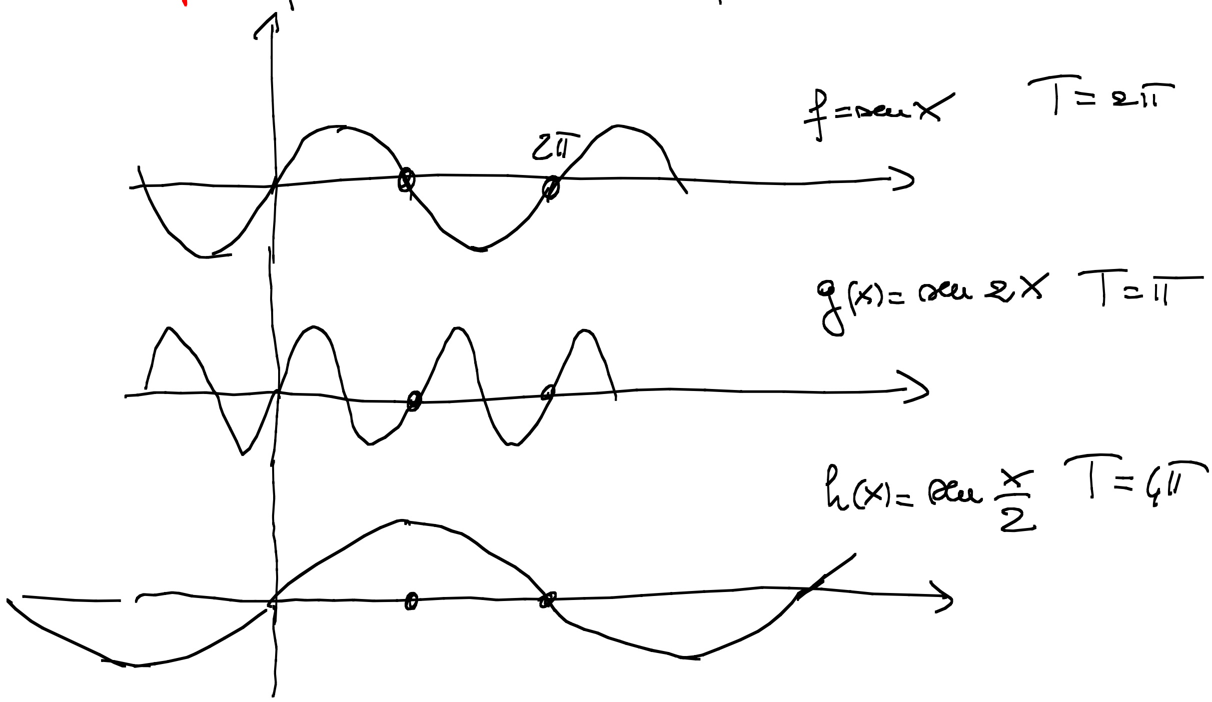
(1) allora $f(kx)$, $k\in\mathbb{N}$, ha periodo T/k

infatti,
$$f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)\right)=f(kx+T)=f(kx)\quad\forall x\in A$$

(2) allora $f\left(\frac{x}{k}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, ha periodo kT

infatti $f\left(\frac{x+kT}{k}\right)=f\left(\frac{x}{k}+T\right)=f\left(\frac{x}{k}\right)$

Esempio $f(x)=\operatorname{sen}x$ che ha periodo $T=2\pi$



Pb se $f(x)$ ha periodo T_1 e $g(x)$ ha periodo T_2
con $T_1=q\,T_2$ $q\in\mathbb{Q}$
allora $f(x)+g(x)$ ha periodo

$$T=\operatorname{mcm}(T_1,T_2)$$

Esempio $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x\right)$ $\quad g(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}x\right)$

quale periodo ha $f(x)+g(x)$?

$f(x)$ ha periodo $2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$

$g(x)$ " " $2\pi \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}\pi$

dunque $T = \text{mcm}\left(3\pi, \frac{5}{2}\pi\right) =$

$= \pi \,\text{mcm}\left(\frac{6}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{30}{2}\pi = 15\pi$

Esercizio Esiste $f(x)$ continua su $[0,1]$, $f \neq 0$ e tale che $f(x)=0$ ∞ volte in $[0,1]$?

dire

$f(x) = \operatorname{sen} x$ si annulla ∞ volte in $[1,+\infty[$

$\Downarrow$

$g(y) = \operatorname{sen} \frac{1}{y}$ si annulla ∞ volte in $]0,1]$

non è continua in $x=0$

non è neppure definita in $x=0$

$\downarrow$

$h(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si annulla ∞ volte in $]0,1]$

inoltre

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

$\downarrow$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si annulla ∞ volte in $[0,1]$, è continua in $[0,1]$ e non è identicamente nulla

Esercizio disporre in ordine crescente i seguenti numeri

$\ln 3$; $\log_3 e$; $\log_{1/3} e$; $\log_{1/e} 3$; $\log_{1/3} \sqrt[3]{e}$; $\log_{e^3}(\sqrt[3]{3})$;

$\log_{1/3^3} \sqrt[3]{1/e}$

Suggerimento : ricondursi a $\ln 3$, ad esempio

$$\log_{e^3} \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3} \log_{e^3}(3) = \frac{1}{3} \, \frac{1}{\log_3(e^3)} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\log_3 e} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \ln(3)$$