$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$$

dim

1° passo $a_1 = 2 > 0$

$a_n > 0$ ipotesi induttiva

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} > 0$

2° passo Proviamo che $\{a_n\}_n$ è decrescente (debolmente)

$a_1 = 2 \geq \frac{3}{2} = a_2$

suppongo che $a_{n-1} \geq a_n$ ipotesi induttiva

Voglio provare $a_n \geq a_{n+1}$

ovvero " " $\cancel{\frac{1}{2}}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \geq \cancel{\frac{1}{2}}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$

ovvero " " $\frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-1}} \geq \frac{a_n^2 + 2}{a_n}$

ovvero " " $a_n a_{n-1}^2 + 2a_n \geq a_{n-1} a_n^2 + 2a_{n-1}$

$a_n a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_n^2 \geq 2(a_{n-1} - a_n)$

$a_n a_{n-1}\cancel{(a_{n-1} - a_n)} \geq 2\cancel{(a_{n-1} - a_n)}$

$\boxed{a_n a_{n-1} \geq 2}$ devo provare questa disug.

3) proviamo che $a_n \geq \sqrt{2}$ $\forall n$

$a_1 = 2 \geq \sqrt{2}$

$a_n \geq \sqrt{2}$ ipotesi induttiva

voglio provare $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{2}$

$\iff$ $a_n + \frac{2}{a_n} \geq 2\sqrt{2}$ (per ipotesi ind. $a_n \geq \sqrt{2} > 0$)

$\iff \quad a_n^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}\, a_n$

$\iff \quad (a_n - \sqrt{2})^2 \geq 0$ e quest'ultima disug. è vera!

Dunque per il punto 3) $a_n \geq 2 \ \forall n$, e quindi dal punto 2) deduco che $\boxed{(a_n)_n \text{ è decrescente debolmente}}$

inoltre è inferiormente limitata da $\sqrt{2}$

$\Longrightarrow \quad \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \sqrt{2}$

teorema limiti successioni monotone

Voglio calcolare ℓ

Osservo che se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$

Passo al limite in $a_{n+1} = \frac{\cancel{1}}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ e trovo

$$\boxed{\ell} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)}$$

$$\Rightarrow 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \Rightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + 2 \Rightarrow \ell^2 = 2$$

$\Rightarrow \ell = \pm\sqrt{2}$ però $a_n \geq \sqrt{2} \ \forall n \Longrightarrow \boxed{\ell = \sqrt{2}}$

Oss: preso 3, la successione

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \end{cases}$$

ripetendo lo stesso procedimento (con $\sqrt{3}$ in luogo di $\sqrt{2}$)

$\Longrightarrow \ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}$

più in generale, $\forall \alpha > 0$, la successione

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right) \end{cases}$$

ha come limite $\ell = \lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{\alpha}$

Oss: preso $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$

si ha che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{2}$ però

$$a_1 = 1 < a_2 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2} > a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} >$$

$$> a_4 > a_5 \ldots$$

per capire meglio cosa accade devo sapere come tracciare il grafico di $y = x$ e di $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

Oss: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$

$$a_1 = -2 < a_2 = \frac{1}{2}\left(-2 + \frac{2}{-2}\right) = -\frac{3}{2} < a_3 = -\frac{17}{12}$$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{n \to +\infty} a_n = -\sqrt{2}$ (esercizio per casa)

Oss $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$

$$a_1 = -1 \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2}{-1}\right) = -\frac{3}{2} \quad a_3 = -\frac{17}{12}$$

Riassumendo
$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$$

se $\alpha > \sqrt{2}$ allora $a_n \underset{n \to +\infty}{\searrow} \sqrt{2}$ visto

se $0 < \alpha < \sqrt{2}$ allora $a_n \searrow \sqrt{2}$ per $n \geq 2$ visto

$\alpha = -\frac{1}{2}$ se $-\sqrt{2} < \alpha < 0$ allora $a_n \nearrow -\sqrt{2}$ per $n \geq 2$

$\alpha = -\frac{3}{2}$ se $\alpha < -\sqrt{2}$ allora $a_n \nearrow -\sqrt{2}$

$a_1 = \sqrt{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

Esercizio

Calcolare $\lim_{n \to +\infty} a_n$ dove $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$

dim

$a_1 = 2 > a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < a_3 = 1 + \frac{1}{3/2} = \frac{5}{3} > a_4 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

$a_1 = 2 > a_3 = \frac{5}{3} > a_5 = \frac{13}{8}$ $\quad$ Spero $\xrightarrow{}$ che $\quad (a_{2n+1}) \searrow$

$a_2 = \frac{3}{2} < a_4 = \frac{8}{5} < a_6 = \frac{21}{13}$ $\quad (a_{2n+2}) \nearrow$

Se esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell = 1 + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ma, essendo $a_1 > 1$, si dimostra per induzione che $a_n > 1$

ipotesi induttiva $a_n > 1$

$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 > 1$ e dunque $a_n > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dunque, se esiste $\lim a_n = \ell$, necessariamente $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(1) Studio $(a_{2n+2})_n$, la sottosuccessione degli indici pari

$$a_4 = 1+\frac{1}{a_3} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{a_2}} = 1+\frac{a_2}{1+a_2} = \frac{1+2a_2}{1+a_2}$$

e dunque, in generale

$$a_{2n+2} = \frac{1+2a_{2n}}{1+a_n}$$

posto $b_n = a_{2n}$
$$\begin{cases} b_1 = \frac{3}{2} \\ b_{n+1} = \frac{1+2b_n}{1+b_n} \end{cases}$$

Punto 1) $b_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$b_2 = \frac{3}{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Suppongo $b_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ipotesi induttiva)

Voglio provare $b_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ovvero

$$b_{n+1} = \frac{1+2b_n}{1+b_n} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff 2+4b_n \leq 1+\sqrt{5}+b_n+\sqrt{5}\,b_n$$

$$\iff 3b_n - \sqrt{5}\,b_n \leq \sqrt{5}-1 \iff b_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$\iff b_n \leq \frac{3\sqrt{5}-3+5-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e quindi è vero per ipotesi induttiva

Proviamo ora che $(b_n)_n$ è crescente

$$b_1 = \frac{3}{2} < b_2 = \frac{1+\frac{3}{2}\cdot 2}{1+\frac{3}{2}} = 4\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

supponiamo $b_{n-1} \leq b_n$ (ipotesi induttiva)

Vogliamo provare $b_n \leq b_{n+1} \iff \frac{1+2b_{n-1}}{1+b_{n-1}} \leq \frac{1+2b_n}{1+b_n}$

$$\iff \cancel{1}+2b_{n-1}+b_n+\cancel{2b_n b_{n-1}} \leq \cancel{1}+2b_n+b_{n-1}+\cancel{2b_n b_{n-1}}$$

$\iff b_{n-1} \leq b_n$ e quest'ultima è vera per l'ipotesi induttiva

Dunque (b_n) è crescente e superiormente limitata da $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$ con $\ell = \frac{1+2\ell}{1+\ell} \iff \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in quanto $b_n \nearrow$

(*) Studio $(a_{2n+1})_n$, sottosuccessione di indice dispari

$$a_3 = 1+\frac{1}{a_2} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} = 1+\frac{a_1}{1+a_1} = \frac{1+2a_1}{1+a_1}$$ e dunque

in generale si ha

$$a_{2n+1} = \frac{1+2a_{2n-1}}{1+a_{2n-1}}$$ posto $c_n = a_{2n-1}$
$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = \frac{1+2c_n}{1+c_n} \end{cases}$$

→ Proviamo che $c_n \geq (1+\sqrt{5})/2$ $\forall n$

$c_1 = 2 \geq (1+\sqrt{5})/2$

si assume (ipotesi induttiva) che $c_n \geq (1+\sqrt{5})/2$

vogliamo provare $c_{n+1} \geq (1+\sqrt{5})/2 \iff \frac{1+2c_n}{1+c_n} \geq (1+\sqrt{5})/2 \iff$

$\iff 2+4c_n \geq 1+\sqrt{5}+c_n+\sqrt{5}\,c_n$

$\iff 3c_n - \sqrt{5}\,c_n \geq \sqrt{5}-1 \iff c_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$\iff c_n \geq (1+\sqrt{5})/2$ che è vera per l'ipotesi induttiva

$\longrightarrow$ Proviamo ora che $(c_n)_n$ è decrescente

$c_1 = 2 \geq 5/3 = c_2$

supponiamo (ipotesi induttiva) $c_{n-1} \geq c_n$

vogliamo provare che $c_n \geq c_{n+1} \iff \frac{1+2c_{n-1}}{1+c_{n-1}} \geq \frac{1+2c_n}{1+c_n}$

$\iff \cancel{1}+2c_{n-1}+c_n+\cancel{2c_nc_{n-1}} \geq \cancel{1}+2c_n+c_{n-1}+\cancel{2c_nc_{n-1}}$

$\iff c_{n-1} \geq c_n$ che è vera per l'ipotesi induttiva

Dunque $(c_n)_n$ è decrescente e inferiormente limitata da $(1+\sqrt{5})/2 \implies \exists \lim_{n\to+\infty} c_n = (1+\sqrt{5})/2$ (il limite ℓ deve soddisfare l'identità $\ell = \frac{1+2\ell}{1+\ell}$ ovvero $\ell = (1\pm\sqrt{5})/2$ e quindi, essendo $c_n \geq (1+\sqrt{5})/2$, $\ell = (1+\sqrt{5})/2$)

Dunque abbiamo $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} c_n$

inoltre $(a_n)_n = (a_{2n})_n \cup (a_{2n-1})_n$

$\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Esercizio

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

dim

prostaferesi

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 2 \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \cdot \left|\cos \frac{x+x_0}{2}\right|$$

$|\cos \alpha| \le 1 \ \forall \alpha$

$$\le 2 \cdot \left|\operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2}\right| \le \cancel{2} \cdot \left|\frac{x-x_0}{\cancel{2}}\right|$$

$|\operatorname{sen} \alpha| \le |\alpha| \ \forall \alpha$

$$\Downarrow$$

$$0 \le |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \le |x - x_0|$$

ora osservo che $\lim_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$

Teorema dei carabinieri

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}$$

$\Downarrow$ come prima !!!

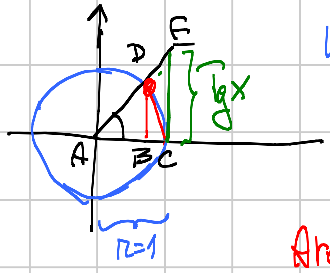
$$0 \le |\cos x - \cos x_0| \le |x - x_0|$$

$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |\cos x - \cos x_0| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (\cos x - \cos x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$



lungh(arco $\overset{\frown}{CD}$) $\equiv$ numero in radianti dell'angolo sotteso x

Area $\overset{\triangle}{ACD}$ < area sett. circolare $\overset{\triangle}{ACD}$ < area triangolo $\overset{\triangle}{AEC}$

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{Tg} x}{2}$$

$$\Downarrow \qquad \operatorname{sen} x < x < \operatorname{Tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\Downarrow \qquad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\qquad 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

$$\forall -x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\qquad 1 > \frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} > \cos(-x)$$

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, 0\right[\qquad 1 > \frac{+\operatorname{sen} x}{+x} > \cos x$$

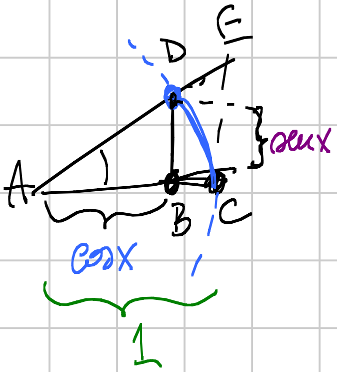
$$\Downarrow$$

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\qquad 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Ma $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

$\underset{\text{Teorema Carabinieri}}{\Longrightarrow} \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



ABD è simile a ACE

$$\Downarrow$$

$$\cos x : 1 = \operatorname{sen} x : CE$$

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{CE}$$

$$CE = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{Tg} x$$

$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta$ voglio esprimere α e β in funzione di $\frac{\alpha+\beta}{2}$ e $\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= \cancel{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} + \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cancel{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$- \operatorname{sen}\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \left(-\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

e analogamente si procede per $\cos\alpha - \cos\beta$

Esercizio (proposto)

Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \end{cases}$$

$$R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$