Probabilità (finita) di un evento $= \dfrac{\text{Casi Favorevoli}}{\text{Casi Possibili}}$

$0 \leq \text{Probabilità} \leq 1$

Esempio Quanti numeri di 4 cifre decrescenti, (le migliaia > centinaia > decine > unità) posso costruire? (nel sistema decimale)

dim

$\{0,1,2,3,\dots,9\} = A$

Modo ingenuo 9876 986 5

5 4
4 3
3 2
2 1
1 0
0

987
986

□ □ □ □

Prendo un sottoinsieme di 4 cifre da A, tutte $\neq$

per esempio

$\{1,5,3,2\} \xrightarrow[\text{ordinandole in modo decrescente}]{\text{1! solo numero}} 5321$

$\Downarrow$

la totalità di questi numeri $=$ n.ro di sottoinsiemi di 4 elementi presi da un insieme di 10 el.ti

$= \binom{10}{4}$ ////

Esercizio

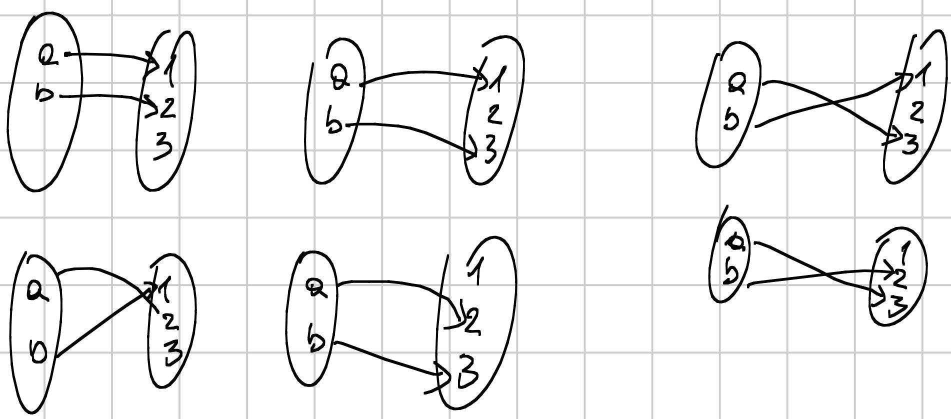
Quante sono le funzioni "iniettive" da un insieme di 6 elementi in un insieme di 10 elementi

dim

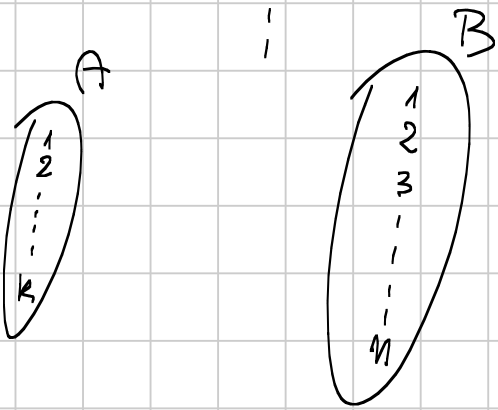
Se chiedo tutte le f.ni (iniettive e non iniettive) da A con 6 elementi e B con 10 elementi

$$= \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdots 10}_{6} = 10^6$$

Proviamo a prendere A con 2 elementi
B " 3 elementi



6 $\qquad D_{3,2} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$



$n \geq k$

Costruisco una f.ne iniettiva

$1 \xrightarrow{f}$ ho n possibili scelte per $f(1)$

$2 \xrightarrow{f}$ " $(n-1)$ " " " $f(2)$ ($f(1)$ è già preso)

$3 \xrightarrow{f}$ " $(n-2)$ " " " $f(3)$

$\dots$

$k \xrightarrow{f}$ " $(n-k+1)$ " " " $f(k)$

Dunque il numero cercato è

$$n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Il problema di partenza ha soluzione $D_{10,6} = \frac{10!}{4!}$

Esercizio

Dato un mazzo di 40 carte diviso in due mazzetti, uno di 30 ed uno di 10 carte. Qual è la probabilità di trovare re e fante di cuori nello stesso mazzetto?

dim

Casi possibili Tutte le possibili pescate di 2 carte sono $\binom{40}{2}$

Casi favorevoli Se sono nel mazzetto da 30 carte, sono uno dei sottoinsiemi di 2 carte di un mazzo da 30, cioè $\binom{30}{2}$

Se cadono nel mazzetto da 10 carte, sono un sottoinsieme di 2 elementi da un mazzetto di 10, cioè $\binom{10}{2}$

Quindi i casi favorevoli sono $\binom{30}{2}+\binom{10}{2}$

$$\text{Probabilità} = \frac{\binom{30}{2}+\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{\frac{30\cdot 29}{2}+\frac{10\cdot 9}{2}}{40\cdot 39/2} = \frac{30\times 29+10\cdot 9}{40\cdot 39}$$

$$= \frac{96\cancel{0}}{156\cancel{0}} = \frac{12}{17}$$

$\begin{array}{r} 900 \\ 870 \\ 90 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 1600 \\ 40 \end{array}$

Oppure si osserva (Perché?) $\text{Probabilità} = \frac{\binom{40}{2}-30\times 10}{\binom{40}{2}} = \frac{780-300}{780} = \frac{48}{68} = \frac{12}{17}$

Esercizio

Qual è il numero (somma), tirando due dadi, che esce con probabilità più alta?

dim

2, 3 --- 12

2 1+1 (12)

3 1+2 o 2+1 (11)

4 1+3 o 2+2 o 3+1 (10)

5 1+4 o 2+3 o 3+2 o 4+1 (9)

(8) 6 1+5 o 2+4 o 3+3 o 4+2 o 5+1

7 1+6 o 2+5 o 3+4 o 4+3 o 5+2 o 6+1

$$P(7) = \frac{6}{2+4+6+8+10+6}$$

Oss: Con 4 dadi il numero più probabile è 14
" 100 " " " " " " 350
(da dimostrare)

Definizione

Data $\{a_n\}$ successione reale, diciamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se

- $\ell \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$
- $\ell = +\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n > M$
- $\ell = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n < -M$

Oss: Il limite è una verifica: dato ℓ, data una successione $\{a_n\}$, verifico che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

Il calcolo del limite è un'altra cosa: si utilizzano i teoremi algebrici e del confronto insieme ai limiti di successioni date

Esercizio

Verificare che $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

dim

$a_n = n^2$ devo verificare che

$\forall M>0\ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n}\quad n^2>M$

devo trovare $\bar{n}=\bar{n}(M)$

$n^2 > M \iff n > \sqrt{M}$

$\forall M>0\quad \exists \bar{n} = \lfloor\sqrt{M}\rfloor + 1 : \forall n>\bar{n}\quad n^2 > (\lfloor\sqrt{M}\rfloor+1)^2 > (\sqrt{M})^2 = M$ ✓

Esercizio

Provare che $\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$

dim

$a_n = (-1)^n \qquad a_1=-1 \quad a_2=1 \quad a_3=-1$

Proviamo che

$\text{non}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\right)$

$\text{non}\left(\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}=\bar{n}(\varepsilon)>0 : \forall n>\bar{n}\quad |a_n-1|<\varepsilon\right)$

$\exists \varepsilon>0\quad \forall \bar{n}\quad \exists n>\bar{n} : \quad |(-1)^n-1| > \varepsilon$

$\exists \varepsilon=1\quad \forall \bar{n}\quad \exists n=2\bar{n}+1>\bar{n} \quad |(-1)^{2\bar{n}+1}-1| = |-2| = 2 > 1$ ✓

$\text{non}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = -1\right)$

$\exists \varepsilon>0\quad \forall \bar{n}\quad \exists n>\bar{n} : \quad |(-1)^n+1| > \varepsilon$

$\exists \varepsilon=1\quad \forall \bar{n}\quad \exists n=2\bar{n}>\bar{n} : \quad |(-1)^{2\bar{n}}+1| = 2 > 1$ ✓

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+2n+1}{10n^2+n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^2+2}{10n^2+2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{30n^4+2n^3+3}{-20n^5+n+1}$$

Sol

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+2n+1}{10n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(10+1/n\right)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{10+1/n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\lim_{n\to+\infty} 2/n^2 + \lim_{n\to+\infty} 1/n^3}{10+\lim_{n\to+\infty} 1/n}$$

$$= +\infty \cdot \frac{3+0+0}{10+0} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^2+2}{10n^2+2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}^{\,1}}{\cancel{n^2}_{\,1}} \cdot \frac{-2+2/n^2}{10+\frac{2}{n}+1/n^2}$$

$$= \frac{-2+\lim_{n\to+\infty} 2/n^2}{10+\lim_{n\to+\infty} 2/n + \lim_{n\to+\infty} 1/n^2} = -\frac{1}{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{30n^4+2n^3+3}{-20n^5+n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n^5}\cdot\frac{30+2/n+3/n^4}{-20+1/n^4+1/n^5}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{30+2/n+3/n^4}{-20+1/n^4+1/n^5}$$

$$= 0\cdot\frac{30}{-20} = 0$$

Esercizio Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+\underset{\boxed{2}}{4}}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+\underset{\boxed{3}}{9}}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$