Introduciamo la relazione di equipotenza tra insiemi
"A equipotente a B" se $\exists f: A \to B$ funzione biunivoca

Def L'insieme A si dice avere "cardinalità n"
e si indica card(A) o #A
se $\exists f: \{1, 2, ..., n\} \to A$ funzione biiettiva
In particolare, se card $A = \# A = n < +\infty$, l'insieme si dice finito

Def Un insieme A si dice "infinito" (o di cardinalità infinita) se non è finito
Quando A è equipotente a $\mathbb{N}$, si dice che A è numerabile

Oss: Preso $B \subseteq \mathbb{N}$, questo è finito o numerabile
$B = \{1, 2, 3\}$ finito
$\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, ..., 2k, ...\}$ numerabile

Esempio $\mathbb{N}$ contiene un suo sottoinsieme proprio equipotente a $\mathbb{N}$

dim Infatti $\mathbb{N} = \{Pari\} \cup \{Dispari\} = \mathbb{P} \cup \mathbb{D}$

e si ha che esiste

$$f: \mathbb{P} \to \mathbb{N} \quad \text{biunivoca}$$
$$n \longmapsto n/2$$

$$f^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{P}$$
$$k \longmapsto 2k$$

Questo dice che $\mathbb{N}$ è equipotente ad una sua parte propria!!! $\square$

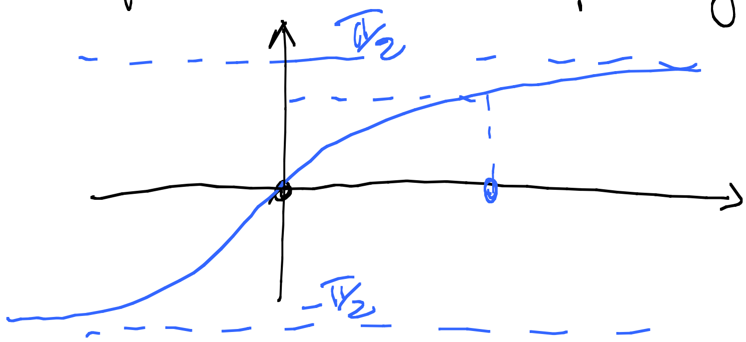
L'esempio precedente si può estendere a tutti gli insiemi infiniti

Teorema A insieme infinito $\Longleftrightarrow \exists E \subsetneq A$ t.c. E è equipotente ad A

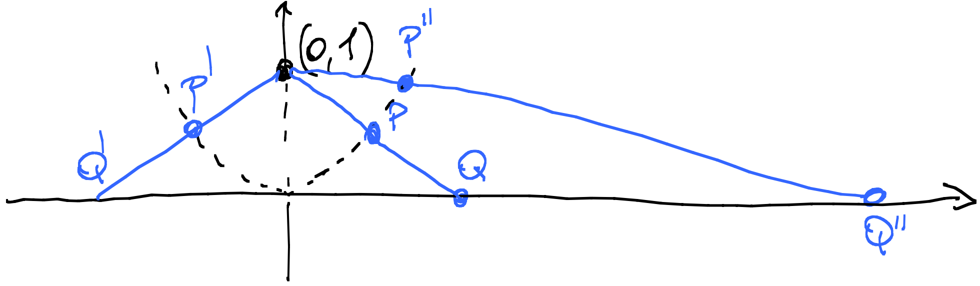
$$E \subsetneq A \overset{Def}{\Longleftrightarrow} A \setminus E \neq \emptyset \quad \left(\text{ovvero } E \subset A, \text{ ma } \exists x \in A \setminus E\right)$$

Oss: $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è equipotente a $\mathbb{R}$

infatti se considero $f = \operatorname{arctg}(x)$



Questo si può vedere anche osservando che la semicirconferenza di lunghezza π è "equipotente" a $\mathbb{R}$



Esercizio: quale è l'espressione analitica della corrispondenza che manda $P \to Q$?

suggerimento: il punto sulla semicirconferenza è $(\cos\vartheta, 1+\operatorname{sen}\vartheta)$ $\vartheta \in]\pi, 2\pi[$

e la retta che passa per $(0,1)$ e $(\cos\vartheta, 1+\operatorname{sen}\vartheta)$ è

$$\frac{x}{\cos\vartheta} = \frac{y-1}{\operatorname{sen}\vartheta} \qquad y = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta}x + 1$$

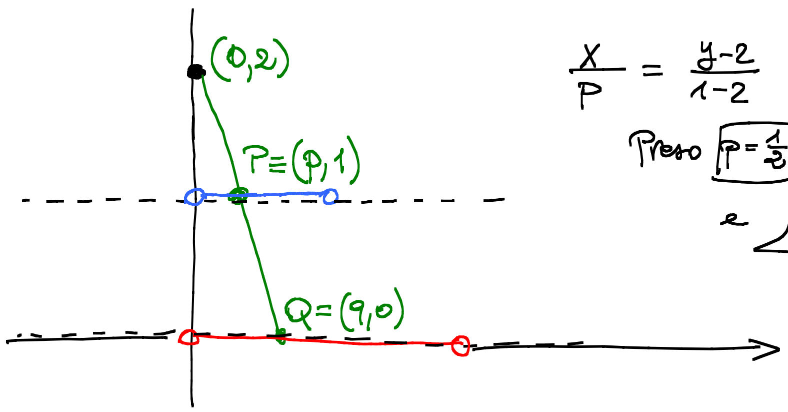
e questa retta incontra $y=0$ in $x\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta}+1=0$

cioè in $\left(-\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}, 0\right)$

Ad esempio il punto $\left(\cos\frac{5}{4}\pi, \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right) \to (-1,0)$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) = \left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right), 1+\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right) \to (\sqrt{3}, 0)$$

Oss: più in generale possiamo mettere in corrispondenza biunivoca un qualsiasi intervallo $]a,b[$ con un qualsiasi intervallo $]b,c[$: ad esempio $]0,1[$ e $]0,2[$



$$\frac{x}{p} = \frac{y-2}{1-2} \qquad y = -\frac{x}{p} + 2$$

Preso $\boxed{p=\frac{1}{2}}$ si ha $y = -\frac{x}{\frac{1}{2}} + 2$

e $\begin{cases} y = -2x+2 \\ y=0 \end{cases} \to \boxed{q=1}$

$$\boxed{p=\tfrac{1}{3} \to q=\tfrac{2}{3}}$$

etc

Esercizio: Costruire una applicazione biunivoca

$f:]0,2[\to]\sqrt{2}, 6[$

Esempio $\{1,2,3\}$ è finito

$\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ $\mathbb{P}$ è numerabile

Teorema Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile

dim

$A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_n^1, \dots\}$ $\leftarrow$ equipotente $\mathbb{N}$

$A_2 = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_n^2, \dots\}$ " "

$A_n = \{a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_n^n, \dots\}$ " "

Scrivo i miei el.ti come una matrice ∞

$1+1=2$

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \dots & a_n^1 & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \dots & a_n^3 \\ \dots \end{matrix}$$

$1+2=2+1$

$3+1=2+2=1+3$

$\{a_1^1\} \cup \{a_2^1, a_1^2\} \cup \{a_1^3, a_2^2, a_3^1\} \cup \dots$

$\{a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_3^1, a_2^2, a_1^3, a_1^4, a_2^3, \dots$

ho costruito

$f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ è suriettiva
e iniettiva

e dunque $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ è Numerabile poiché
equipotente a $\mathbb{N}$ $\boxed{///}$

COROLLARIO $\mathbb{Q}$ (= n.ri razionali) è numerabile

infatti posso $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p, q > 0 \right\}$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7
3	3/1	3/2	3/3	3/4	– –		
4	4/1	4/2	4/3				

Teorema $\mathbb{R}$ NON È NUMERABILE

dim

Proveremo che $]0,1[$ non è numerabile
utilizziamo gli sviluppi decimali

$$]0,1[= \{ 0,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \cdots \alpha_n \cdots \; : \; \alpha_i \in \{0,1,\ldots,9\} \}$$

<u>Per assurdo</u> $]0,1[$ numerabile

$$]0,1[= \{ a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots \}$$

ovvero $\exists f : \mathbb{N} \to]0,1[$ biiettiva

$$a_1 = 0{,}\alpha_1^1\,\alpha_1^2\,\alpha_1^3\,\alpha_1^4 \;----$$

$$a_2 = 0{,}\alpha_2^1\,\alpha_2^2\,\alpha_2^3\,\alpha_2^4 \;---$$

$$a_3 = 0{,}\alpha_3^1\,\alpha_3^2\,\alpha_3^3\,\alpha_3^4 \;---$$

$$a_4 = 0{,}\alpha_4^1\,\alpha_4^2\,\alpha_4^3\,\alpha_4^4 \;---$$

$$---$$

Costruisco un nuovo dito $\bar{a} = 0{,}\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3 --- \bar{\alpha}_n --$ $\notin$ i precedenti che ho numerato

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} 7 & \alpha_k^k < 5 \\ 2 & \alpha_k^k \geq 5 \end{cases}$$

in questo modo abbiamo $\bar{a} \neq a_k \quad \forall k$

in quanto $\bar{\alpha}_k \neq \alpha_k^k$

$$\bar{a} = 0{,}\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3 --- \bar{\alpha}_k ---$$

sono $\neq$ $\qquad \forall k = 1,2,3,---$

$$a_k = 0{,}\alpha_k^1\,\alpha_k^2\,\alpha_k^3 --- \alpha_k^k ---$$

Dunque $\bar{a} \notin \{a_1, a_2, a_3, ---, a_k, ---\}$

Dunque $f: \mathbb{N} \to]0,1[$ NON È SURIETTIVA

ASSURDO

quindi $]0,1[$ non è numerabile $\square$

Oss: si ha quindi che $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{R}$ contengono infiniti elementi, ma

$$\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathbb{R})$$

$$\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Q})$$

Esercizio

Calcolare sup A dove $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

dim

$A = \left\{ \frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5} ; \frac{5}{6} ; \dots ; \frac{n}{n+1} ; \dots \right\}$

(Potrei osservare che $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ $\forall n \geq 1$ (induzione x casa))

Si osserva che $\frac{n}{n+1} < 1$ $\forall n$

infatti equivale a $n < n+1$ $\forall n$ che è vero

$\Rightarrow 1 \in M_A \Rightarrow [1, +\infty[\subseteq M_A$

Voglio provare che $1 = \min M_A$

Proveremo che $\forall b < 1$ $\exists n \in \mathbb{N} : b < \frac{n}{n+1}$ (ovvero $b \notin M_A$)

$b < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow nb + b < n \Leftrightarrow b < n(1-b)$

Devo provare che

$\forall b < 1$ $\exists n \in \mathbb{N} : b < n(1-b)$
$\quad \vee$
$\quad 0$

è vero per il Principio di Archimede $\boxed{\text{W}}$

Principio di Archimede

Presi $a, b > 0$ $\exists n \in \mathbb{N} : n\cancel{a} > b/\cancel{a}$

Esercizio

Calcolare inf A sup A dove $A = \left\{ \frac{n^3+1}{n^5\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

dim

inf A $\qquad A = \left\{ \frac{2}{1} ; \frac{9}{32\sqrt{2}} ; \dots \right\}$

$0 \in m_A \qquad n^3+1 \geq 1 \quad n^5\sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{n^3+1}{n^5\sqrt{n}} > 0 \ \forall n$

$0 \notin A$

Voglio provare che $0 = \max m_A$

Prendo $\lambda > 0$ e voglio provare che $\exists m \in \mathbb{N}: \frac{m^3+1}{m^5\sqrt{m}} < \lambda$

$$m^3+1 < \lambda m^5 \sqrt{m}$$

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{m^5\sqrt{m}}{m^3+1}$$

osservo che $m^3+1 < 2m^3 \Rightarrow \frac{1}{2m^3} < \frac{1}{m^3+1}$

$$\Rightarrow \frac{m^5\sqrt{m}}{2m^3} < \frac{m^5\sqrt{m}}{m^3+1}$$

Proviamo che $\exists m$: $\frac{m^5\sqrt{m}}{2m^3} = \frac{m^2\sqrt{m}}{2} > \frac{1}{\lambda}$

" " " : $m^2\sqrt{m} > \frac{2}{\lambda}$

" " " : $m^{5/2} > 2/\lambda$

" " " : $m > \left(2/\lambda\right)^{2/5}$

$\forall \lambda > 0 \quad \exists m > \left(2/\lambda\right)^{2/5}$: $\frac{m^3+1}{m^5\sqrt{m}} < \lambda$

ovvero $\lambda \notin \mathcal{M}_A$ ovvero $0 = \inf A = \max \mathcal{M}_A$

sup A

$\frac{m^3+1}{m^5\sqrt{m}} \le 2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(ricordo che $\frac{1^3+1}{1^5 \cdot \sqrt{1}} = 2$)

$\iff m^3+1 \le 2m^5\sqrt{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

è vero poiché

$$m^3 \le m^5\sqrt{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$
$$1 \le m^5\sqrt{m}$$

quindi $2 \in \mathcal{M}_A$ $\quad 2 \in A \Rightarrow 2 = \max A = \sup A$