$D_{n,n}$ = n.ro permutazioni di n el.ti $= n!$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{se } n \geq 1 \end{cases} \qquad \left(0! = 1 \quad e \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \right)$$

(Vedremo che $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}$ per $n \to +\infty$)

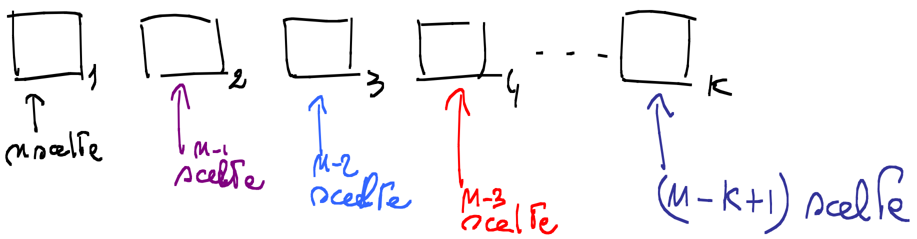
$(n-k)! \cdot D_{n,k} = n!$ ovvero

$D_{n,k}$ = n.ro di disposizioni di k oggetti (senza ripetizione) presi da un insieme di n oggetti

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Oss:

Se io devo comporre una parola di k lettere $\neq$ prese da un alfabeto di n lettere $\neq$, procedo così



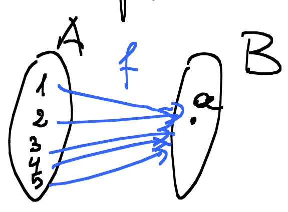
$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

DISPOSIZIONI con ripetizione

Problema Dato un insieme A di k oggetti
B di n oggetti

quante sono le funzioni $f: A \to B$?

$k = 5 \qquad n = 1$



quante sono le funzioni ?

esiste 1 sola f.ne $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=a$

2

$k=5 \qquad n=2 \qquad \{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{f} \{a,b\}$ $\qquad 32$

Per costruire f, devo costruire

$f(1) \to a,\ b$

$f(2) \to a,\ b$

$f(3) \to a,\ b$

$f(4) \to a,\ b$

$f(5) \to a,\ b$

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5$$

N.ro di funzioni da un insieme A di k el.ti,
a " " B " n "

è dato da $n^k = (\text{n.ro el.ti codominio})^{(\text{n.ro el.ti dom})}$

$D^r_{n,k}$ = n.ro di disposizioni con ripetizione di k oggetti da un insieme di n oggetti

$= n^k$

N.ro Targhe possibili AB 123 CD sono

$$26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2$$

Problema Determinare i sottoinsiemi di 0 el.ti di $\{1,2,3\}$

" " " " 1 " " "

" " " " 2 " " "

" " " " 3 " " "

" " " " 4 " " "

0 el.ti $\longrightarrow$ 1 solo sottoinsieme ϕ

1 " $\longrightarrow$ 4 * " $\{a\}\ \{b\}\ \{c\}\ \{d\}$

2 " $\longrightarrow$ 6 $\{a,b\}\ \{a,c\}\ \{a,d\}$ $\{b,c\}\ \{b,d\}\ \{c,d\}$

3 " $\longrightarrow$ 4 * " $\{a,b,c\}\ \{a,b,d\}$ $\{a,c,d\}\ \{b,c,d\}$

4 " $\longrightarrow$ 1 $A=\{a,b,c,d\}$

totale 16 $= 2^4$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$$

$$C_{4,1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 4 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = C_{4,3}$$

$$C_{4,4} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4!}{4!} = 1 = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = C_{4,0}$$

ovvero

$C_{n,k} \equiv$ n.ro di sottoinsiemi di k el.ti presi da un insieme di n el.ti

OSS: dato un k-sottoinsieme di un insieme di n el.ti

$\{a_1, \dots, a_k\} \longrightarrow$ individua $k!$ disposizioni

ma le disposizioni di k el.ti presi da n el.ti sono $\dfrac{n!}{(n-k)!} \Longrightarrow C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} C_{n,k} & 0 \le k \le n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quando $0 \le k \le n$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} \qquad \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!\,1!} \qquad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!\,0!}$$

$$\begin{array}{cccc} \binom{0}{0} & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & - & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Teorema (proprietà di $\binom{n}{k}$)

i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall k \ \forall n \quad (0 \le k \le n)$

iii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \forall k \ \forall n \quad (1 \le k \le n)$

dim

i) $$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\ n!} = 1 = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \binom{n}{n}$$

ii) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

iii) $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n! \cdot k}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$\frac{k}{k}$ $\qquad$ $\frac{n-k+1}{n-k+1}$

$$= \frac{n!\,(\cancel{k}+n-\cancel{k}+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$\boxed{///}$

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(k+1)}{1+k^2} = \frac{0+1}{0^2+1} + \frac{1+1}{1^2+1} + \frac{2+1}{2^2+1} + \frac{3+1}{3^2+1}$$

$$\sum_{k=-2}^{1} (3k+3) = (3(-2)+3) + (3\cdot(-1)+3) + (3\cdot 0+3) + (3\cdot 1+3)$$

$$\sum_{k=2}^{4} 1 \left(= \sum_{k=2}^{4} a_k \right. \quad \text{dove } a_k = 1 \quad k=2,3,4$$

$$= a_2 + a_3 + a_4 = \Big) 1+1+1 = 3$$

$$\sum_{i=-1}^{3} 2 = \underset{i=-1}{2} + \underset{i=0}{2} + \underset{i=1}{2} + \underset{i=2}{2} + \underset{i=3}{2} = 10$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k - \sum_{k=1}^{2} a_k \left(= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_1 + a_2) \right)$$

$$= a_3 + a_4 = \sum_{k=3}^{4} a_k$$

Teorema (del Binomio di Newton)

$a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

Suggerimento Calcolare esplicitamente nel caso $n=2$, $n=3$

Oss: (cambio di variabili)

$$\sum_{k=2}^{4} a_k = a_2 + a_3 + a_4 = \underset{h=k+1 \quad k=h-1}{} \sum_{h=3}^{5} a_{(h-1)}$$

$$\sum_{h=3}^{5} a_{(h-1)} = a_{(3-1)} + a_{(4-1)} + a_{(5-1)} = a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{k=2}^{6} \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}$$

$$\sum_{k=2}^{6} \frac{k}{k+1} \underset{h=k+1}{=} \sum_{h=3}^{7} \frac{h-1}{h} = \frac{3-1}{3} + \frac{4-1}{4} + \frac{5-1}{5} + \frac{6-1}{6} + \frac{7-1}{7}$$

$k=2 \rightarrow h=3$

$k=6 \rightarrow h=7$

dim (Binomio Newton)

Per induzione su n

$$n=1 \qquad (a+b)^1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$$

Vero

vale per n (ipotesi induttiva) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Voglio provare che $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \underset{\text{ip. induttiva}}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

non va formula!

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{h=k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k}_{k=h} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^{n-(h-1)} \cdot b^h + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} a^{n+1-h} b^h \left[\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} \right] + b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n+1}{h} \cdot a^{n+1-h} b^h + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

$$= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^h$$

$\boxed{///}$

Oss: Sia dato un insieme A di n elementi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = \# \mathbb{P}(A)$$

n.ro sottoinsiemi 0 el.ti

sott. con 1 el.to

n.ro sottoinsiemi con k elementi

n.ro sottoinsiemi con n el.ti

$$\# \mathbb{P}(A) = \text{n.ro di elementi di } \mathbb{P}(A)$$
$$= \text{n.ro di sottoinsiemi di } A$$
$$= 2^n$$

Infatti $\quad 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Teorema Se A ha n elementi allora $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ = insieme delle parti di A ha 2^n elementi

dim (per induzione su $\mathbb{N}$)

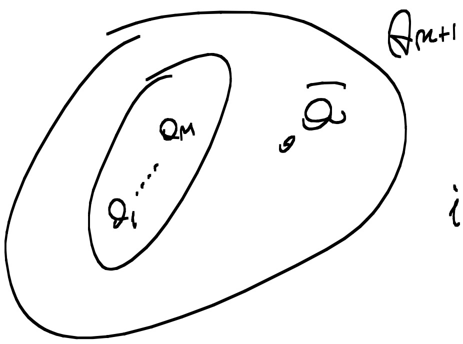
$n=1$ $\qquad A=\{a\}$ e i suoi sottoinsiemi sono
$$\mathbb{P}(\{a\})=\{\phi,\{a\}\}$$

dunque ha $2^1=2$ elementi <u>Vera</u>

Valga per n (ipotesi induttiva): quando $A=\{a_1,\dots,a_n\}$
allora $\mathbb{P}(A)$ ha 2^n elementi

Voglio provare che se A ha $(n+1)$ el.ti allora $\mathbb{P}(A)$ ha 2^{n+1} elementi

$$A_{n+1}=\overbrace{\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}}^{A_n}\cup\{\bar{a}\}$$



preso $B\subseteq A_{n+1}$

i) $\bar{a}\notin B \Rightarrow B\subseteq A_n$ con A_n di n elementi

$\Rightarrow$ ne trovo 2^n di questo tipo

ii) $\bar{a}\in B \Rightarrow B=C\cup\{\bar{a}\}$ dove $C\subseteq A_n$

$\Rightarrow$ ne trovo 2^n di questi C

$\Rightarrow$ ne trovo 2^n " " B

$$2^n+2^n=2^{n+1} \text{ sottoinsiemi}$$

////

Def Dati $A,B\subseteq\mathbb{R}$, diciamo che "A è equipotente a B" se $\exists\ f:A\to B$ biunivoca

La relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza nei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$[5] = \{ \{5 \text{ pecore}\}, \{5 \text{ uccelli}\}, \{1,2,3,4,5\}, \dots \}$

Def Un insieme A si dice "finito" (o di cardinalità finita) se $\exists f: A \to \{1,2,\dots,n\}$ biunivoca
$\exists n \in \mathbb{N}$

Def Un insieme A è "infinito" se non è finito

Teorema Comunque si prende A,

$$\mathrm{card}(A) = \# A < \# \mathbb{P}(A)$$

dim

Certamente posso trovare $f: A \to \mathbb{P}(A)$ iniettiva
x esempio $f: a \to \{a\}$
($f(a)$ è un insieme $\forall a \in A$)

Però proveremo che $\nexists$ funzioni $f: A \to \mathbb{P}(A)$ suriettive

Per assurdo esista $\bar{f}: A \to \mathbb{P}(A)$ suriettiva
e consideriamo

$$(*) \quad \underbrace{Y := \{ x \in A : x \notin \bar{f}(x) \}} \in \mathbb{P}(A)$$

essendo f suriettiva, $\exists\, y \in A : \bar{f}(y) = Y$

$y \in Y \Rightarrow y \in \bar{f}(y) \Rightarrow y \notin Y$ Assurdo

$y \notin Y \Rightarrow y \notin \bar{f}(y) \Rightarrow y \in Y$ Assurdo

quindi $\nexists\, f: A \to \mathbb{P}(A)$ suriettive ////

Attenzione: la dim. è corretta, ma c'è un punto da chiarire!!

(*) l'insieme $Y = \{x \in A : x \notin \bar{f}(x)\} \neq \emptyset$

poiché

$\bar{f}$ per ipotesi è suriettiva, e quindi

esiste $\bar{y} : \bar{f}(\bar{y}) = \emptyset \in \mathcal{P}(A)$

però $\bar{y} \notin \bar{f}(\bar{y}) = \emptyset$