2015-10-08- Am1 M&F-ese2

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$|x-3| = |2x-3| - 2$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$1+|x-1| = |x+2|$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$\left|2x - |x^2-3|\right| < 1$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$|x-1| \leq |x-2|$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$x + |x-1| \geq 3$$ (lasciato da svolgere per casa)

Esercizio Provare che $(100!)^3 - 100!$ è divisibile per 3

Esercizio Provare che $3^{998} - 2^{499}$ è divisibile per 7 (lasciato allo studente per casa)

Esercizio Calcolare

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{10{,}000}\right)$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$|x-3| = |2x-3| - 2$$

dim

Via analitica

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 2x-3>0 \\ x-\cancel{3} = 2x-\cancel{3}-2 \end{cases} \quad o' \quad \begin{cases} x-3>0 \\ 2x-3\le 0 \\ x-3 = -(2x-3)-2 \end{cases} \quad o' \quad \begin{cases} x-3\le 0 \\ 2x-3>0 \\ -(x-3) = 2x-3-2 \end{cases}$$

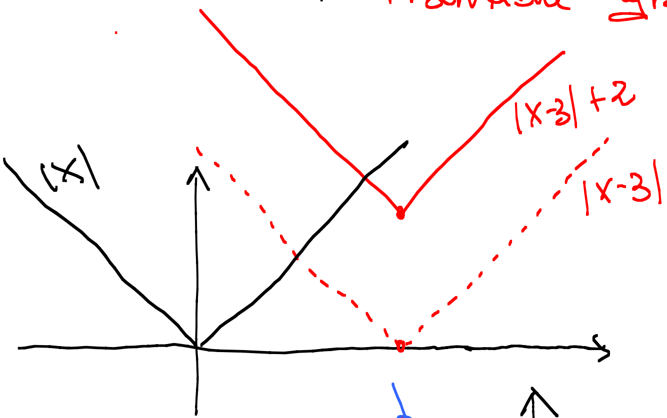
$$o \begin{cases} x-3\le 0 \\ 2x-3\le 0 \\ -(x-\cancel{3}) = -(2x-\cancel{3})-2 \end{cases}$$

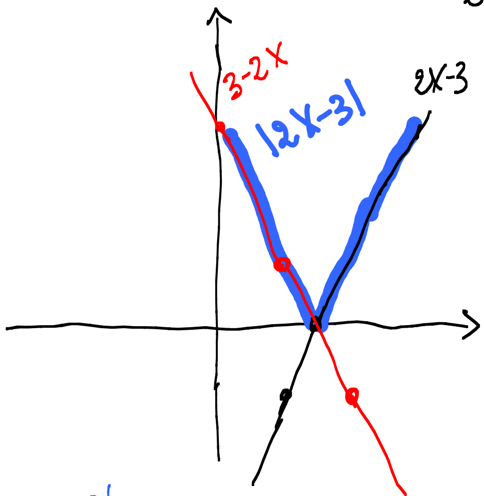
$$\iff \begin{cases} x>3 \\ x>3/2 \\ x=2 \end{cases} \quad o' \quad \begin{cases} x>3 \\ x\le 3/2 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x\le 3 \\ x>3/2 \\ \cancel{3}x = +8/3 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x\le 3 \\ x\le 3/2 \\ x=-2 \end{cases}$$

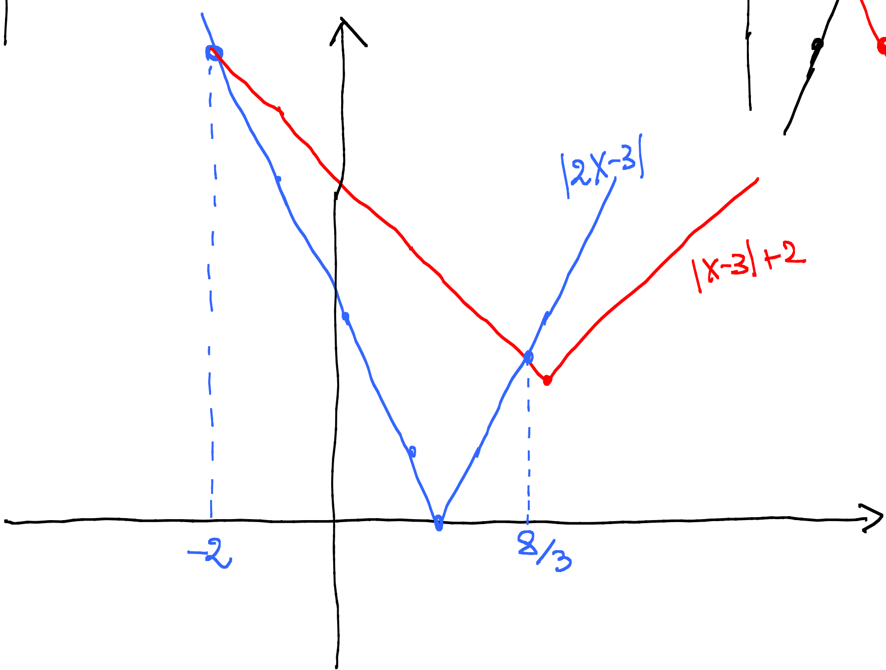
$$\iff \quad x = 8/3 \qquad x=-2$$

$2+|x-3| = |2x-3|$ **risoluzione grafica**

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & x>\frac{3}{2} \\ 3-2x & x\le\frac{3}{2} \end{cases}$$







Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

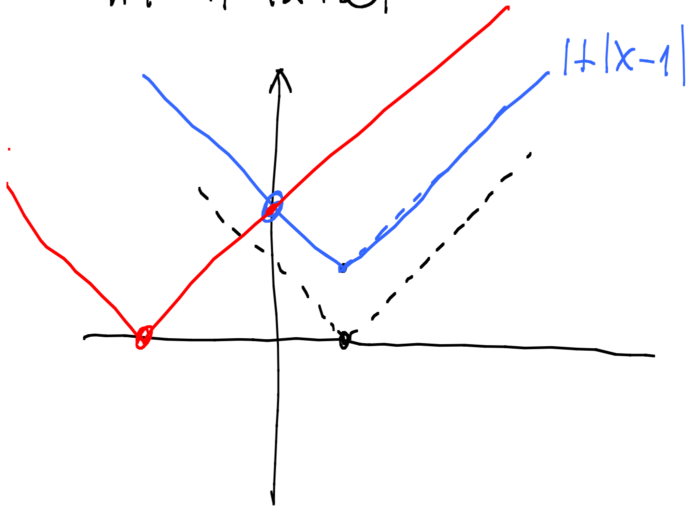
$$1+|x-1|=|x+2|$$

dim

$$\cancel{\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ 1+x-1=x+2 \end{cases}} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x-1>0 \\ x+2\le 0 \\ 1+x-1=-x-2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x-1\le 0 \\ x+2>0 \\ 1-x+1=x+2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \cancel{\begin{cases} x-1\le 0 \\ x+2\le 0 \\ 1-x+1=-x-2 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} x>1 \\ x\le -2 \end{cases}} \qquad \begin{cases} x\le 1 \\ x>-2 \\ 2x=0 \end{cases}$$

$$1+|x-1|=|x+2|$$



$x=0$ l'unica soluzione

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$(*) \quad |x-1|\le|x-2|$$

dim

Sconsigliato

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ x-1\le x+2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x-1>0 \\ x+2\le 0 \\ x-1\le -(x+2) \end{cases} \quad \text{o} \quad \dots$$

Consigliato (via analitica)

$$(*) \iff -|x-2|\le x-1\le|x-2| \iff \begin{cases} x-1\le|x-2| \\ 1-x\le|x-2| \end{cases}$$

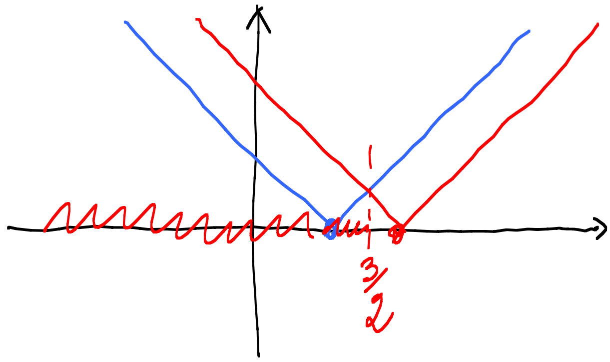
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{x-1 \le x-2} \\ \cancel{1-x \le |x-2|} \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x-1 \le 2-x \\ 1-x \le |x-2| \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x \le 3 \\ 1-x \le x-2 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} 2x \le 3 \\ 1-\cancel{x} \le 2-\cancel{x} \end{cases} \leftarrow \text{sempre vera}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \le 3/2 \\ 3/2 \le x \end{cases} \quad o \quad x \le 3/2$$

$$\Longleftrightarrow x \le 3/2$$

$|x-1| \le |x-2|$ via grafica (consigliata)



Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$\big|2x-|x^2-3|\big| < 1$$

dim

$$-1 < 2x-|x^2-3| < 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < |x^2-3| \\ |x^2-3| < 2x+1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < x^2-3 \\ |x^2-3| < 2x+1 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} 2x-1 < 3-x^2 \\ |x^2-3| < 2x+1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2>0 \\ -2x-1<x^2-3<2x+1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2+2x-4<0 \\ -1-2x<x^2-3<1+2x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2>0 \\ x^2-3<2x+1 \\ -2x-1<x^2-3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2+2x-4<0 \\ x^2-3<1+2x \\ -1-2x<x^2-3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<1-\sqrt{3} \ \text{o} \ 1+\sqrt{3}<x \\ x^2-2x-4<0 \\ x^2+2x-2>0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} -1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5} \\ x^2-2x-4<0 \\ x^2+2x-2>0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},+\infty) \\ 1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5} \\ x<-1-\sqrt{3} \ \text{o} \ -1+\sqrt{3}<x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x\in(-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}) \\ x\in(1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}) \\ x\in(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},+\infty) \end{cases}$$

Terminare a casa!

Abbiamo utilizzato le seguenti proprietà

1° proprietà $\quad |A|<B \Longleftrightarrow -B<A<B$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A<B \\ -B<A \end{cases}$$

2° proprietà $\quad |A|>B \Longleftrightarrow A>B \ \text{o} \ -A>B$

(immediate: $|A|=\max\{A,-A\}<B \Longleftrightarrow \begin{cases} A<B \\ -A<B \end{cases} \Longleftrightarrow -B<A<B$

$|A|=\max\{A,-A\}>B \Longleftrightarrow A>B \ \text{o} \ -A>B$

Principio di Induzione

$$S \subseteq \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} i)\ 1 \in S \\ ii)\ n \in S \Rightarrow n+1 \in S \end{array} \quad \Longrightarrow \quad S = \mathbb{N}$$

Principio del buon ordinamento (minimo intero)

$$S \subseteq \mathbb{N} \quad S \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ \bar{s} = \min S$$

Teorema (minimo intero $\Rightarrow$ induzione)

Se vale principio buon ordinamento allora vale principio di induzione

dim

x assurdo non vale principio di induzione

$$\text{non}\left(S \subseteq \mathbb{N} \ \begin{Bmatrix} 1 \in S \\ n \in S \Rightarrow n+1 \in S \end{Bmatrix} \Rightarrow S = \mathbb{N} \right)$$

$$S \subseteq \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} 1 \in S \\ n \in S \Rightarrow n+1 \in S \end{array} \quad e \quad S \neq \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow B = \mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists\ \bar{b} = \min B \quad e \quad \bar{b} > 1 \quad (1 \in S)$$

$$\Rightarrow \exists\ (\bar{b}-1) \in S \quad \Rightarrow (\bar{b}-1)+1 = \bar{b} \in S$$

ASSURDO $\blacksquare$

Esercizio

provare che $(100!)^3 - 100!$ è divisibile per 3

dim

Considero $f(n) = n^3 - n$ e osservo che

$f(2) = 8 - 2 = 6$ divisibile per 3

$f(3) = 27 - 3 = 24$ " " "

$f(4) = 64 - 4 = 60$ " " "

non erano necessari

suppongo che $f(n) = n^3 - n$ sia divisibile per 3
voglio provare che
$f(n+1) = (n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3

$$f(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1} = n^3 - n + 3(n^2+n)$$

$$= \underbrace{f(n)}_{\text{divisibile per 3 per ipotesi ind.}} + \underbrace{3(n^2+n)}_{\text{palesemente divisibile per 3}} \Rightarrow f(n+1) \text{ divisibile per 3}$$

$\Rightarrow f(100!)$ è divisibile per 3 $\square$

Esercizio

Calcolare $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{10.000}\right)$

dim

$$f(n) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \overset{?}{=}$$

Devo indovinare $f(n)$

$$f(2) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad f(3) = f(2)\left(1-\frac{1}{3^2}\right) = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$f(4) = f(3)\left(1-\frac{1}{16}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{16}_{8}} = \frac{5}{8} = \frac{4+1}{2\cdot 4} \qquad f(5) = f(4)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right) = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{25}_{5}} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

$$f(6) = f(5)\cdot\left(1-\frac{1}{36}\right) = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{36}_{12}} = \frac{7}{12} = \frac{6+1}{2\cdot 6}$$

$\vdots$

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} \quad \text{CONGETTURA}$$

Per dimostrare che $f(n) = \dfrac{n+1}{2n}$ $\forall n \geq 2$ uso Principio di Induzione

$$f(2) = \frac{2+1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4} = \left(1-\frac{1}{4}\right) \quad \text{ok, vero!}$$

Suppongo che $f(n) = \dfrac{n+1}{2n}$ Ipotesi Induttiva

Voglio provare che $f(n+1) = \dfrac{(n+1)+1}{2(n+1)}$

$$f(n+1) = \underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)}_{f(n)}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = f(n)\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$

Ipotesi induttiva

$$= \frac{\cancel{n+1}}{2n} \cdot \frac{n^2+2n}{(n+1)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{n}^{1}\cdot(n+2)}{2\cancel{n}_{1}(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$$

dunque $f(100) = \dfrac{101}{200}$ $\boxed{11}$