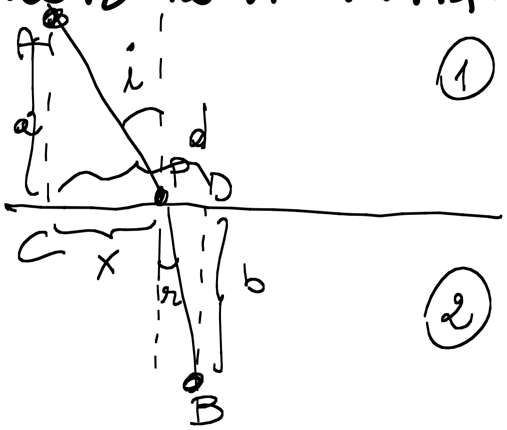


(1) u: velocità della luce nel mezzo 1

(2) v: velocità della luce nel mezzo 2

Il punto P si colloca in modo che $T(x)$ = Tempo percorrenza sia minimo

$$T(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}}_{\text{Tempo di percorrenza di AP}} + \underbrace{\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v}}_{\text{Tempo di percorrenza di PB}}$$

b = lungh. BD
a = lungh. AC
x = " CP
$d-x$ = " PD

L'incognita è il punto P, ovvero la x

$$T'(x) = \frac{\cancel{2}x}{u\cdot\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-\cancel{2}(d-x)}{v\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0$$ per trovare i punti stazionari

provo a eliminare le radici

$$x^2\cdot v^2\cdot\left(b^2+(d-x)^2\right) = (d-x)^2\cdot u^2\cdot(a^2+x^2)$$

questa è un'eq. di 4° grado in x completa (con x^3, x^2, x, x^0)

In questo modo mi trovo davanti a complicazioni notevoli, poiché NON SO SE ESISTA UNA SOLUZIONE ESPLICITA (non so neppure se esista una soluzione)

Ritorno a $T'(x)=0 \iff \overbrace{\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}}^{f(x)} = \overbrace{\frac{d-x}{v\sqrt{b^2+(d-x)^2}}}^{g(x)}$

Il primo e secondo membro sono "simili" nel senso che sono f.ni di x del tipo

$$K\frac{x}{\sqrt{h+x^2}} \qquad K\cdot\frac{(d-x)}{\sqrt{h+(d-x)^2}}$$

Studio $f(x)=\dfrac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}$ $\quad f(0)=\dfrac{0}{u\cdot|a|}=0 \quad f(d)=\dfrac{d}{u\sqrt{a^2+d^2}}>0$

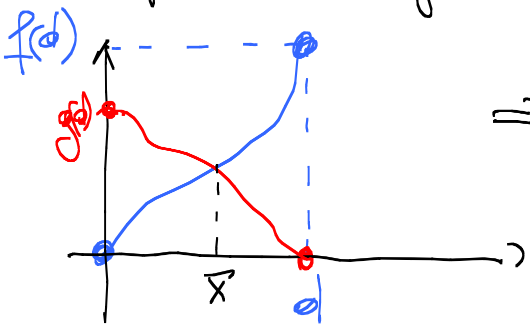
$$f'(x) = \frac{1}{u\sqrt{a^2+x^2}} + x\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(a^2+x^2)^{-3/2}\cdot\frac{\cancel{2}x}{u} =$$

$$= \frac{a^2+x^2-x^2}{u\cdot(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{u\cdot(a^2+x^2)^{3/2}} > 0 \quad \forall x\in[0,d]$$

Studio $g(x) = \dfrac{d-x}{v\cdot\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ $\quad g(0) = \dfrac{d}{v\cdot\sqrt{b^2+d^2}} > 0$

$g(d) = 0$

verificare che $g'(x) < 0 \quad \forall x \in [0,d]$



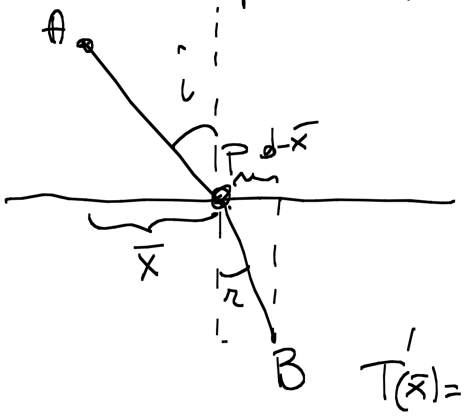
$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (0,d)$ t.c.

$g(\bar{x}) = f(\bar{x})$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (0,d) : T'(\bar{x}) = 0$

ma $T'(x) = \begin{cases} <0 & 0\le x<\bar{x} \quad (\text{poiché } f(x)<g(x)) \\ >0 & \bar{x}<x\le d \quad (\text{"} \quad g(x)<f(x)) \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{x}$ è pto di minimo per $T(x)$ = Tempo di percorrenza



$$\frac{\bar{x}}{\sqrt{a^2+\bar{x}^2}} = \operatorname{sen} i$$

$$\frac{d-\bar{x}}{\sqrt{b^2+(d-\bar{x})^2}} = \operatorname{sen} r$$

$$T'(\bar{x}) = 0 \iff \frac{\bar{x}}{u\sqrt{a^2+\bar{x}^2}} = \frac{d-\bar{x}}{v\cdot\sqrt{b^2+(d-\bar{x})^2}}$$

$$\iff \frac{\operatorname{sen} i}{u} = \frac{\operatorname{sen} r}{v}$$

$$\iff \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{u}{v}$$ LEGGE SNELL

Formula di Erone

$x^2 = 2$

$2x^2 = 2 + x^2 \iff x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} \iff x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x} + x\right)$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \end{cases}$$

si dimostra che $x_n \longrightarrow \sqrt{2}$

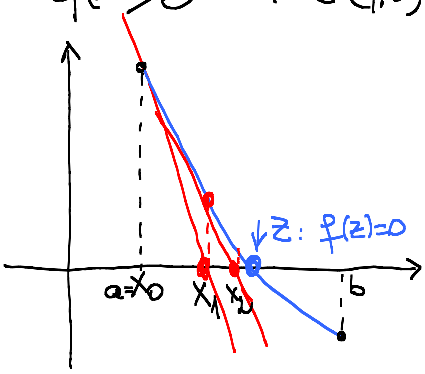
Metodo delle Tangenti (o di Newton) per la ricerca delle radici

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2([a,b])$ (la f.ne con derivata seconda continua $\forall x \in [a,b]$)

$f(a) \cdot f(b) < 0$ (la f.ne f ha uno zero in (a,b))

$f' < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ (lo zero di f in (a,b) è unico)

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ (la funzione f è convessa in (a,b))



Sia $x_0 = a$. Interseco la retta Tg in $(x_0, f(x_0))$ con l'asse x e trovo

$$\begin{cases} y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{(retta Tg in } (x_0, f(x_0))) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Resta così individuato $x_1 > x_0$ (in quanto $-f'(x_0) > 0$ e $f(x_0) > 0$)

ed inoltre, essendo $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($f(x)$ è convessa)

si ha $f(x_1) > 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 < z$

Considero quindi x_1 e la retta tangente al grafico di f in $(x_1, f(x_1))$ e la interseco con l'asse x

$$\begin{cases} y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Resta così individuato $x_2 > x_1$ (in quanto $-f'(x_1) > 0$ e $f(x_1) > 0$)

ed inoltre, essendo $f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ (f è convessa)

$\Rightarrow x_2 < z$

....

Proseguendo costruiamo $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

che risulta essere crescente e

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < z$

dunque $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

$\Rightarrow f(\ell)=0$ ovvero $\ell = z$, lo zero di $f(x)$

II caso $x^2-2=0$

In questo caso si applica il ragionamento visto prima

$f(x)=x^2-2$ che è convessa su $[1,2]$

crescente su $[1,2]$ (e non ↓ come prima)

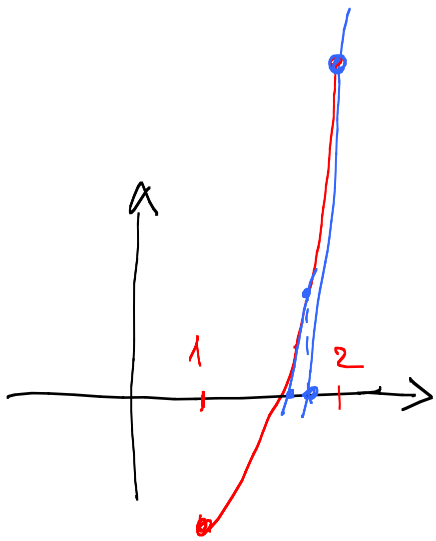
$\in C^2([1,2])$

$f(1)=-1<0<2=f(2)$

Essendo $f'>0$ si ha, prendendo $x_0=2$, che $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}<0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0$

e dunque si viene a costruire $\{x_n\}_n$ decrescente

$z < \cdots x_n < \cdots < x_2 < x_1 < x_0$



$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-2}{2x_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \quad n \geq 0 \end{cases}$$

e quindi abbiamo ritrovato la formula di ERONE

Metodo Bisezione

$f(x)=x^2-2$ continua in $[1,2]$

$f(1)\cdot f(2)<0$

$\Rightarrow c_1=\frac{1+2}{2}$ $\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}>0$

$[a_1,b_1]=\left[1,\frac{3}{2}\right]$

$\Rightarrow c_2=\frac{1+3/2}{2}=\frac{5}{4}$ $\quad f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{25}{16}-2<0$

$[a_2,b_2]=\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$

Se nel metodo bisezione voglio appross. la radice a meno di $1/10$

Risposta non basta fermarsi quando $b_n-a_n=\frac{1}{5}$

Problema

$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $\quad f$ continua e derivabile

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$

$\overset{??}{\Rightarrow}$ $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$??

NO $\quad f(x)=\frac{1}{x}\cos x^2$ è continua e derivabile $\forall x>0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos x^2+\frac{1}{x}\cdot(-\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x=-\frac{1}{x^2}\cos x^2-2\operatorname{sen}(x^2)$

$\nexists \lim_{x\to+\infty} f'(x)$ in quanto $\nexists \lim_{x\to+\infty} -2\operatorname{sen}(x^2)$

Teorema

$f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua e derivabile $\forall x \in [0,+\infty[$

$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$

Se $l \in \mathbb{R}$ allora $m = 0$

dim

Considero l'intervallo $[n, n+1]$ e gli applico Lagrange

$\Rightarrow \exists z_n \in (n, n+1) \quad f'(z_n) = f(n+1) - f(n)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \big(f(n+1) - f(n)\big) = \lim_{n\to+\infty} f(n+1) - \lim_{n\to+\infty} f(n) = l - l = 0$$

$$\begin{gathered} \| \\ \lim_{n\to+\infty} f'(z_n) = \lim_{z\to+\infty} f'(z) = m \end{gathered} \qquad \Rightarrow m = 0 \qquad \blacksquare$$

Problema

Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l > 0$ (<0) allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$

f derivabile $\forall x > 0$

RISPOSTA $\boxed{SI}$

+ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x > M \quad l - \varepsilon < f'(x) < l + \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{l}{2} \quad \exists M > 0 \ \forall x > M \quad \frac{l}{2} < f'(x)$

Considero l'intervallo $[M, y]$ e applico il Teorema di Lagrange $\exists z \in (M, y)$: $\dfrac{f(y) - f(M)}{y - M} = f'(z) > \frac{l}{2} > 0$

$$\Rightarrow f(y) > f(M) + \frac{l}{2} \cdot (y - M)$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to+\infty} f(y) \geq \lim_{y\to+\infty} \left[f(M) + \frac{l}{2}(y - M) \right] = +\infty \qquad \blacksquare$$

Esercizio

Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di

$$f(x) = 3x^4 + 4ax^3 - 12a^2x^2 + 48 = 0$$

dim

Voglio SOLTANTO sapere quante volte $f(x)$ attraversa l'asse x

$a=0 \quad f(x) = 3x^4 + 48 \geq 48 > 0 \quad \forall x \Rightarrow \emptyset$ radici

Osservo che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Per studiare il n.ro di radici studio $\boxed{f'(x)=0}$

$$f'(x) = 12x^3 + 12ax^2 - 24a^2x = 12x(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ o } x_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+8a^2}}{2} \quad \begin{cases} \frac{-a-3|a|}{2} = x_2 \\ \frac{-a+3|a|}{2} = x_3 \end{cases}$$

$\boxed{a>0} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -2a < 0 < x_3 = a$

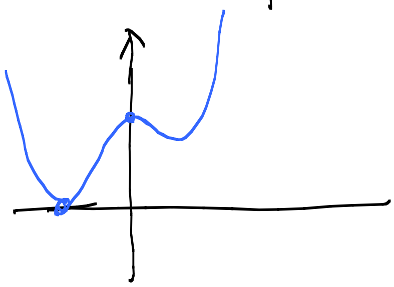
max relativo

minimo relativo

1) $0 < f(-2a) < f(a)$

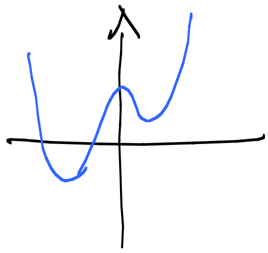
$\Rightarrow \emptyset$ radici

2) $0 = f(-2a) < f(a)$



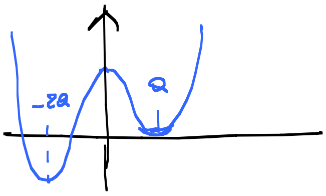
$\Rightarrow$ 1 radice $\underline{x = -2a}$

3) $f(-2a) < 0 < f(a)$



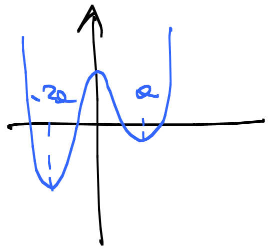
$\Rightarrow$ 2 radici

4) $f(-2a) < f(a) = 0$



$\Rightarrow$ 3 radici

5) $f(-2a) < f(a) < 0$



$\Rightarrow$ 4 radici

Verifichiamo che, quando $a>0$, $f(-2a) < f(a)$ $\forall a$

$$f(-2a) = 3(2a)^4 + 4(-2a)^3 \cdot a - 12a^2(-2a)^2 + 48$$
$$= \cancel{48a^4} - 32a^4 - \cancel{48a^4} + 48$$
$$\wedge$$
$$f(a) = 3 \cdot a^4 + 4a^4 - 12a^4 + 48$$
$$= -5a^4 + 48$$

Nel caso $a<0$ si ha $-2a > 0 > a$

e si ha ancora $f(-2a) < f(a)$

dunque abbiamo una situazione simmetrica rispetto al caso $a>0$ $\square$

Esercizio

Determinare al variare di k, il n.ro di soluzioni di $(2x^2+3x)e^x = k$

dim

$f(x) = (2x^2+3x)e^x$

$$\lim_{x\to+\infty} f = +\infty \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x}{e^{-x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y^2-3y}{e^y} = 0^+$$

$$f'(x) = (4x+3)e^x + (2x^2+3x)e^x = (2x^2+7x+3)e^x = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{4} \begin{cases} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

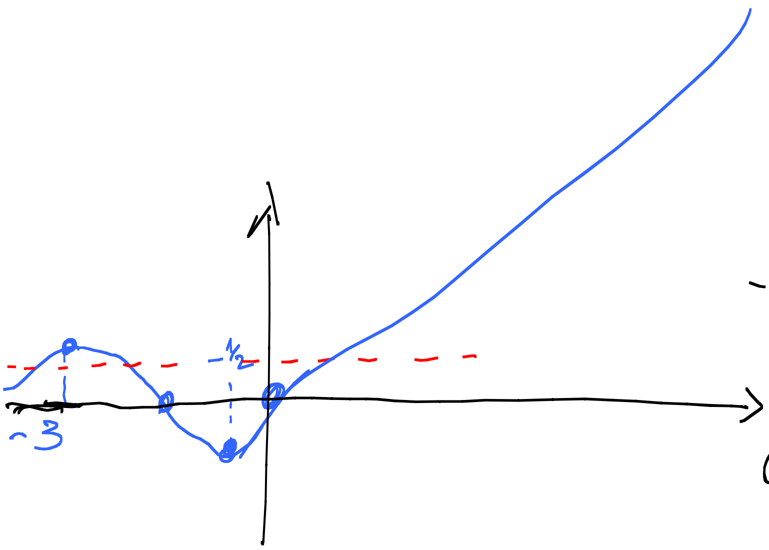
$$f' = \begin{cases} >0 & x<-3 \\ <0 & -3<x<-\frac{1}{2} \\ >0 & -\frac{1}{2}<x \end{cases} \Rightarrow f \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{cases}$$

$x=-3$ p.to di max relativo

$x=-\frac{1}{2}$ " " min relativo

$f(-3) = (18-9)e^{-3} = 9/e^3$

$f(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-\frac{3}{2})e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$



$k < -\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \emptyset$ sol.

$k = -\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow 1$ sol.

$-\frac{1}{\sqrt{e}} < k \leq 0 \Rightarrow 2$ sol.

$0 < k < \frac{9}{e^3} \Rightarrow 3$ sol

$k = \frac{9}{e^3} \Rightarrow 2$ sol

$\frac{9}{e^3} < k \Rightarrow 1$ sol