Esercizio

Determinare (se ∃) a, b e $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + b - a & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ 8x - x^2 - 3c & x < 0 \end{cases}$$

risulti derivabile con derivata continua $\forall x \in \mathbb{R}$

dim

f è continua e derivabile $\forall a, b, c$ se $x \neq 0$

Devo solo studiare f in $x = 0$

CONTINUITÀ

$$\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} [(a-1)\cdot x + b - a] = b - a = 3 = -3c = \lim_{x\to 0^-} f =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} (8x - x^2 - 3c)$$

necessariamente $\boxed{\begin{matrix} b-a=3 \\ c=-1 \end{matrix}}$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (a-1) = a-1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (8-2x) = 8$$

necessariamente $\boxed{a-1=8}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ b-a=3 \\ a-1=8 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-1 \\ b=12 \\ a=9 \end{cases}$$

□

Esercizio

Dire quali tra le seguenti funzioni è monotona crescente su $\mathbb{R}$

$f_1 = e^{-x}$ $\quad f_2 = |x| e^x$ $\quad f_3 = x + e^x$ $\quad f_4 = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

dim

$f_3 = x + e^x$ è somma di f.ni strett. crescenti $\Rightarrow$ è strett. crescente

$(f_3' = 1 + e^x > 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_3 \uparrow)$

$f_1'(x) = -e^{-x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1 \downarrow$ su $\mathbb{R}$

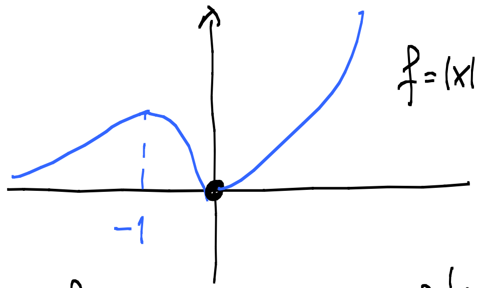
$$f_2(x) = \begin{cases} x e^x & x \geq 0 \\ -x e^x & x < 0 \end{cases} \qquad f_2'(x) = \begin{cases} e^x + x e^x & x > 0 \\ -e^x - x e^x = -e^x(x+1) & x < 0 \end{cases}$$

quindi f_2 è crescente per $x > 0$

" f_2 " " " $x < -1$

f_2 è decrescente per $-1 < x < 0$

$f = |x| e^x$



$f = |x| e^x$ NON è strett. crescente su $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad f'(-1) = 0 \quad f(0) = 0$

$$f_4(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \qquad f' = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}(1+x^2-2x)$$

$$= \frac{e^x}{(1+x^2)^2} \cdot (1-x)^2 > 0 \quad \forall x \neq 1$$

$\Rightarrow f \uparrow$ su $\mathbb{R}$

Esercizio

Provare che $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0$ (1)

$x e^{1/x} > 1 \quad \forall x > 1$ (2)

dim

La (1) già sapevo che è vera!!

Dimostriamo la (1)

prima parte: $\ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0$

Considero $f(x) = x - 1 - \ln x$ voglio provare $f \geq 0 \quad \forall x > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

f è continua su $(0,+\infty)$, tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ $x \to +\infty$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (0,+\infty)$ t.c. $f(\bar{x}) = \min f((0,+\infty))$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \iff x = 1$ $\quad f(1) = 0 = \min f((0,+\infty))$

Ma allora $f(x) \geq f(1) = 0 \quad \forall x > 0$ che è quanto volevo provare

parte seconda: $\ln x \geq \frac{x-1}{x} \quad \forall x > 0$

$\iff x \ln x \geq x - 1 \quad \forall x > 0$

Introduco $f(x) = x \ln x - x + 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ (ricordare che $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0^-$)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [x(\ln x - 1) + 1] = +\infty$

Studiamo la monotonia di f

$f' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x \begin{cases} < 0 & 0 < x < 1 \\ = 0 & x = 1 \\ > 0 & 1 < x \end{cases}$

$\Rightarrow x = 1$ è punto di minimo assoluto per f su $(0,+\infty)$ e si ha quindi

$f(x) \geq f(1) = 1 \cdot \ln 1 - 1 + 1 = 0 \quad \forall x > 0$

che è la mia tesi!!

(2) Provare che $x e^{1/\sqrt{x}} \geq 1 \quad \forall x > 1$

Introduco $f(x) = x e^{1/\sqrt{x}}$ e voglio provare che

$f(x) \geq 1 \quad \forall x > 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = e > 1$!

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x e^{1/\sqrt{x}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty \ (> 1)$

Studio la monotonia di f $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

$f'(x) = e^{1/\sqrt{x}} + x \cdot e^{1/\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot x^{-3/2}\right)$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right] = 0 \iff 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \iff$$

$$\iff \sqrt{x} = \frac{1}{2} \iff \boxed{x = 1/4}$$

(in $x = 1/4$ $f(x)$ ha un minimo assoluto
$f(x) \geq f(1/4) = \frac{1}{4} \cdot e^{\sqrt{1/4}} = \frac{e^2}{4} > 1$)

$$f' > 0 \quad \forall x > 1 \implies f(x) > f(1) = e > 1 \quad \forall x > 1$$

$$\implies f(x) > 1 \quad \forall x > 1$$

Esercizio

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \alpha x^2 + \frac{e^{-x}}{x}$$

è iniettiva su $(0,+\infty)$

dim

$f_\alpha(x)$ è continua su $(0,+\infty)$ e dunque

iniettività $\iff$ stretta monotonia

$$\iff f_\alpha' \neq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

- $f_\alpha' = 2\alpha x - \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} = 0 \qquad \left(e^{-x} \cdot \frac{1}{x}\right)'$

$$\iff 2\alpha x = e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \qquad x \in (0,+\infty)$$

$$\iff \underbrace{2\alpha x^3 = e^{-x} \cdot (x+1)} \qquad x \in (0,+\infty)$$

$\alpha = 0$ l'eq. diventa $(x+1)e^{-x} = 0 \iff x = -1$

e dunque $\nexists$ soluzioni in $(0,+\infty)$

e dunque $f_0'(x) = -e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) < 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

e dunque $f_0 \downarrow$ e quindi iniettiva

$\alpha<0$ $\qquad \underbrace{2\alpha x^3}_{\wedge\, 0} = \underbrace{e^{-x}(x+1)}_{\vee\, 0} \quad \forall x\in(0,+\infty)$

quindi $\nexists$ radici di $f_\alpha'(x)=0$

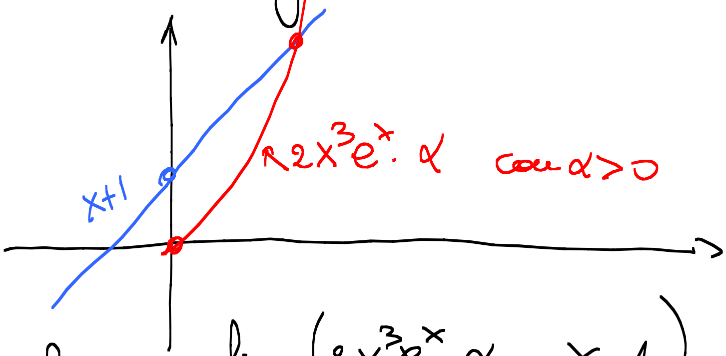
quindi $f_\alpha'(x)=2\alpha x - e^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)<0 \quad \forall x>0$

quindi $f_\alpha \downarrow$ e quindi iniettiva $\alpha<0$

$\alpha>0$ $\qquad \underbrace{2x^3\alpha}_{\vee\, 0} = \underbrace{e^{-x}\cdot(x+1)}_{\vee\, 0}$

$\iff 2x^3e^x\cdot\alpha = x+1$

$\iff g(x) = 2x^3e^x\cdot\alpha - (x+1)$



$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x^3e^x\alpha - x-1\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3e^x\left(\alpha - \frac{1}{2x^2e^x} - \frac{1}{2x^3e^x}\right)$

$= +\infty$

$g(0) = -1$

$\Rightarrow \exists \bar{x} :\ g(\bar{x})=0$ e quindi

$$f_\alpha'(x) = \begin{cases} <0 & 0<x<\bar{x} \\ >0 & \bar{x}<x \end{cases}$$

e dunque $f_\alpha(x)$ NON E' strett. monotone

" " $f_\alpha(x)$ " " iniettiva $\forall\alpha>0$

Esercizio

Calcolare dimensioni della lattina di Coca Cola "più economica" da 50 cl

dim

Cerco lattine cilindriche

per "più economica" intendo la lattina che impiega (nella sua costruzione) il minimo quantitativo di alluminio

Il quantitativo di alluminio è direttamente proporzionale alla superficie della lattina

$$S = \pi R^2 \cdot 2 + 2\pi R \cdot H$$

$$V = \frac{1}{2} = \pi R^2 \cdot H$$

Dobbiamo cercare il $\min \{ S(R,H) : \pi R^2 \cdot H = \frac{1}{2} \}$

$$H = \frac{1}{2\pi R^2} \qquad S\left(R, \frac{1}{2\pi R^2}\right) = 2\pi R^2 + \frac{\cancel{2\pi} R}{\cancel{2\pi} R^{\cancel{2}}} = f(R)$$

Cerco il $\min\limits_{R>0} f(R)$ $\qquad f(R) = 2\pi R^2 + \frac{1}{R}$

$$\lim_{R \to 0^+} f(R) = +\infty \qquad \lim_{R \to +\infty} f(R) = +\infty$$

f è continua

$\Longrightarrow \exists \bar{R} : f(\bar{R}) = \min f((0,+\infty))$

$$f'(R) = \frac{d}{dR} f(R) = 4\pi R - \frac{1}{R^2} = 0 \iff 4\pi R^3 = 1$$

$$\iff \bar{R} = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$$

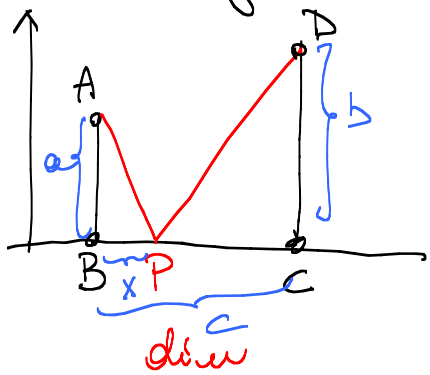
$f(\bar{R}) = \min f((0,+\infty))$

$$\bar{H} = \frac{1}{2\pi \bar{R}^2} = \frac{1}{2\pi} (4\pi)^{2/3} \qquad \bar{R} = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$$

Esercizio

Dati due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determinare P in modo che

lunghezza $(AP+PD)$ sia minima



$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Rightarrow P \equiv$ p.to medio tra B e C

$$L(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

$$L'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{\cancel{2}(c-x)}{\cancel{2}\sqrt{b^2+(c-x)^2}}(-1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \cdot \sqrt{b^2+(c-x)^2} = (c-x)\cdot\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 b^2 + \cancel{x^2(c^2+x^2-2cx)} = (c^2+x^2-2cx)\cdot a^2 + \cancel{c^2x^2} + \cancel{x^4} - \cancel{2cx^3}$$

$$x^2(b^2-a^2) + x(2ca^2) - a^2c^2 = 0$$

$b=a$

$$x = \frac{\cancel{a^2}c^{\cancel{2}}}{2\cancel{c}\,\cancel{a^2}}$$

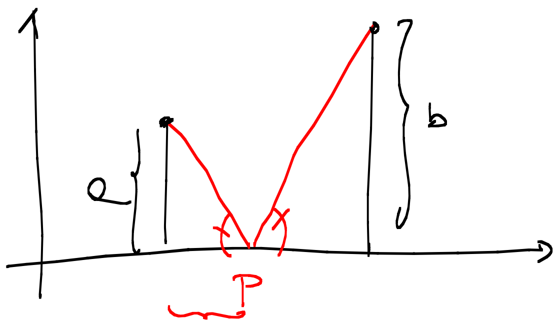
$$x_{1,2} = \frac{-2ca^2 \pm \sqrt{4c^2a^4 + 4a^2c^2(b^2-a^2)}}{2(b^2-a^2)}$$

$= \dots$

$$= \frac{ac}{b \pm a}$$

il caso $b-a$ non è accettabile poiché $x = \dfrac{ac}{b-a} \notin (0,c)$

$$\boxed{x = \frac{ac}{b+a}} \qquad c - x = c - \frac{ac}{b+a}$$



$$x = \frac{ac}{b+a}$$

$$\frac{a}{\frac{ac}{b+a}} = \frac{b}{c - \frac{ac}{b+a}}$$

Oss: se esiste $f'(0)$ allora non è detto che f' sia continua in $x=0$

esempio $f=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

Però

se $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \ell$ allora $\exists\, f'(x_0)=\ell$

infatti $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(z_x)$ con $|z_x - x_0| < |x-x_0|$

Teorema Lagrange : z_x compreso tra x e x_0

dunque $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{z\to x_0^-} f'(z)$

$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{z\to x_0^+} f'(z)$

da cui segue la tesi in quanto $\lim_{z\to x_0^-} f'(z) = \lim_{z\to x_0^+} f'(z)$

implica che $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ ovvero f derivabile in x_0