Esercizio

Provare che $f(x)=\operatorname{sen} 1/x$ non è uniformemente continua in $(0,1]$

dim

$f(x)=g(h(x))$ $\quad g(y)=\operatorname{sen} y$, $h(x)=1/x$

g è continua $\forall x\in\mathbb{R}$

h " " $\forall x\neq 0$

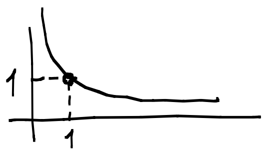
$\Rightarrow f(x)$ è continua $\forall x\neq 0$

Si dimostra che $\nexists \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} 1/x$

(per provare che $\operatorname{sen} x \not\xrightarrow[x\to+\infty]{}$ si prendevano $x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ e $y_n=\frac{3}{2}\pi+2n\pi$ $\quad x_n,y_n\to+\infty$ ma $\operatorname{sen} x_n=1\longrightarrow 1$

$\operatorname{sen} y_n=-1\longrightarrow 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$)

l'applicazione $x\to 1/x=h(x)$



$h((0,1))=(1,+\infty)$

$h((1,+\infty))=(0,1)$

Dunque, per $\frac{1}{x_n}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $\frac{1}{y_n}=\frac{3}{2}\pi+2n\pi$ $\Rightarrow$ $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, $\quad y_n=\dfrac{1}{\frac{3}{2}\pi+2n\pi}\longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\operatorname{sen}\frac{1}{x_n}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \operatorname{sen}\frac{1}{y_n}=\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi=-1\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1\end{array}$$

e dunque $\nexists \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 1/x$

Se conoscessimo il Teorema

"$f:]a,b[\to\mathbb{R}$ uniformemente continua allora $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ $\exists \lim_{x\to b} f(x)$"

allora sapendo che $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 1/x$ $\nexists$, ne concluderemo che $\operatorname{sen} 1/x$ non è u.c. su $(0,1]$

Noi conosciamo il Teorema, allora proveremo che

non è vero ($f = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è u.c. su $(0,1]$)

cioè

non è vero $\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in (0,1] \ |x-y| < \delta \Rightarrow \right.$

$$\left. \Rightarrow \left| \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \operatorname{sen}\frac{1}{y} \right| < \varepsilon \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in (0,1] \ |x_\delta - y_\delta| < \delta$$

$$\text{e } \left| \operatorname{sen}\frac{1}{x_\delta} - \operatorname{sen}\frac{1}{y_\delta} \right| \geq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \varepsilon = 1 > 0 : \forall \delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \ y_n = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2n\pi} : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

$$\text{e } \left| \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} - \operatorname{sen}\frac{1}{y_n} \right| = 2 > 1$$

quindi risulta non verificata l'uniforme continuità su $(0,1]$

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| = \left| \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} - \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2n\pi} \right| = \left| \frac{\cancel{\pi}\, 1}{\pi^{\cancel{2}} \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\left(\frac{3}{2} + 2n\right)} \right| < \frac{1}{n} \qquad \blacksquare$$

Oss: la continuità si fa punto per punto

la uniforme continuità dipende dall'insieme

ovvero

$\delta = \delta(\varepsilon$, insieme considerato$)$

uniforme continuità è un concetto GLOBALE

continuità " " " LOCALE

MONOTONIA : GLOBALE

PARITÀ : "

DISPARITÀ : "

limite : LOCALE

Esercizio

Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n}+\frac{2-n}{2}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-2+3-4+\dots-2n}{n+6}\right)$$

dim

$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{1+2+3+\dots+n}{n}+\frac{2-n}{2}=\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}+1-\frac{n}{2}$

$$=\cancel{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}+1-\cancel{\frac{n}{2}}=\frac{3}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{3}{2}$$

$$\overbrace{\overbrace{1-2}^{-1}\overbrace{+3-4}^{-1}\overbrace{+5-6}^{-1}+\dots\overbrace{+(2n-1)-2n}^{-1}}^{n}=-n$$

$$\underbrace{1-2}_{-1}\qquad \underbrace{}_{+2}\qquad -2$$

$$a_n=\frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{n+6}=\frac{-n}{n+6}=\frac{-1}{1+6/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1$$

Esercizio

(a_n), (b_n) t.c. $a_n>0\ \forall n$, $\lim_{n\to+\infty}a_n=1$
$|b_n|<1\ \forall n$

quali tra le seguenti affermazioni sono vere?

1) $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=2$ 2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n a_n+b_n}{n+2}=1$

3) $\exists\nu>0 : 2a_n+b_n>0\ \forall n>\nu$ 4) $\exists\nu>0 : a_n-b_n\geq 0\ \forall n>\nu$

dim

1) è falsa: presa $a_n=1\ \forall n$ e $b_n=0\ \forall n$ si ha
$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=1\neq 2$!!

3) è vera $\begin{cases}\varepsilon=0{,}4\ \ \exists\bar n=\bar n(\varepsilon)>0 : \forall n>\bar n \quad a_n>1-0{,}4\\ \forall n \quad b_n>-1\end{cases}$

$\varepsilon=0{,}4 \ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \quad 2a_n+b_n > 2(1-0{,}4)-1 = 0{,}2>0$ 4

4) è falso: costruisco $a_n = 1-\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$b_n = +1-\frac{1}{n} \longrightarrow 1 \qquad |b_n|<1 \ \forall n$

e si ha $\quad a_n-b_n = 1-\frac{2}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}<0 \ \forall n$

2) è vero $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n a_n + b_n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n \cdot \frac{1}{n}}{1+2/n} =$

$= \frac{1+0}{1+0} = 1$ $\boxed{////}$

Esercizio

Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+a_n} = 2$ allora

1) $a_n = \frac{2\ln n}{n}$ $\qquad$ 2) $a_n = e^n - 1$

3) $a_n = \frac{2^n}{n}$ $\qquad$ 4) $a_n = 2-1/n$

dim

$\sqrt[n]{10} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$

3) è vera : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2$

2) è falso : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+e^n-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^n} = e \neq 2$

1) è falso : $\underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\leq$}}\\ 1}}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+\frac{\ln n}{n}}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+\frac{\ln n}{n}} = 1$

4) è falso: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+2-1/n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4-\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4} = 1$

$\geq$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2+2-1/n} = 1 \neq 2$

Esercizio

La funzione $f(x) = \begin{cases} 5 \operatorname{sen} \pi x - 3|x| + 2x & |x|<1 \\ ax + bx^2 & |x| \geq 1 \end{cases}$

è continua se $a = ?$ $b = ?$

dim

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Devo "saldare" in modo continuo i tratti di f nei p.ti $x=-1$ e $x=1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (ax + bx^2) = -a + b$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (5 \operatorname{sen} \pi x - 3(-x) + 2x) = \lim_{x \to -1^+} (5 \operatorname{sen} \pi x + 5x) = -5$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (5 \operatorname{sen} \pi x - 3x + 2x) = \lim_{x \to 1^-} (5 \operatorname{sen} \pi x - x) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax + bx^2) = a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = -5 \\ a + b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b = -6 \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Esercizio

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ $\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{a^3 + x} + a^2 - 2}{x} \in \mathbb{R}$

dim

Se $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{a^3 + x} + a^2 - 2 \neq 0$ allora $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{a^3 + x} + a^2 - 2}{x}$

(poiché $\lim_{x \to 0^+} \ldots \neq \lim_{x \to 0^-} \ldots$)

Dunque se $\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{a^3 + x} + a^2 - 2}{x} \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{a^3 + x} + a^2 - 2 = 0$$

ovvero

$$\sqrt[3]{a^3} + a^2 - 2 = a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 2)(a - 1) = 0$$

ovvero $a=-2$ o $a=1$

$a=-2$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x-8}+4-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x-8}+2}{x}\cdot\frac{(x-8)^{2/3}-2\cdot(x-8)^{1/3}+4}{(x-8)^{2/3}-2(x-8)^{1/3}+4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cancel{-8}\cancel{+8}}{x\left[(x-8)^{2/3}-2(x-8)^{1/3}+4\right]}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

$a=1$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}+1-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\cdot\frac{(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1}{(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x\left((x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right)}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$ ▥

Esercizio

Calcolare $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{2h}$$

dim

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)+f(x_0)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

$$\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{2h}=$$ per casa

Da fare a casa

Esercizio

Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{x}$ (è una forma indeterminata $0/0$)

dim

$$\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{1+x} - \cos x\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1-\cos x - x\cos x}{1+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x}\left[\frac{1-\cos x}{x} - \cos x\right] = \frac{1}{1+x}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x} - \cos x\right]$$

$$\downarrow x\to 0$$

$$\frac{1}{1+0}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 0 - 1\right] = -1$$

Esercizi

Calcolare $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{Tg} x}\right)$ (è della forma $\infty - \infty$)

dim

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot x \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0 = 0$$

$\blacksquare$

Esercizio Per quali x è soddisfatta $\sqrt{x^2-16} \le 1+|x-3|$

dim

$1+|x-3| > 0$ sempre, quindi debbo risolvere

$$\begin{cases} x^2-16 \ge 0 \\ x^2-16 \le 1+(x-3)^2+2|x-3| \end{cases} \iff \begin{cases} x\le -4 \text{ o } x\ge 4 \\ \cancel{x^2}-16 \le 1+\cancel{x^2}-6x+9+2|x-3| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\le -4 \\ 2(3-x)+26-6x = 32-8x \ge 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 4\le x \\ 2(x-3)+26-6x = 20-4x \ge 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\le -4 \\ x\le 4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 4\le x \\ x\le 5 \end{cases} \iff x\in]-\infty,-4] \cup [4,5]$$