2015-10-01 - An1 M&F - ese 1 giovedì 11.30-16.30 1

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0 \right\}$$

Oss: una dimostrazione per assurdo è supporre $\sqrt{2} = p/q$ primi tra loro

i) p,q dispari primi tra loro $\Rightarrow p^2$ e q^2 dispari e $p^2/q^2 = 2$
$\Rightarrow p^2 = 2q^2$ ovvero p^2 pari ASSURDO

ii) p pari, q dispari primi tra loro $\Rightarrow p = 2k$ q dispari
$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{4k^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \cancel{4}^{2} k^2 = \cancel{2} q^2 \Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow q$ pari
ASSURDO

iii) p dispari, q pari primi tra loro $\Rightarrow p^2/q^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$
$\Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow p$ è pari ASSURDO $\square$

Lemma Dato un polinomio a coefficienti interi

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$

Suppongo che $P(p/q) = 0$ con $p/q \in \mathbb{Q}$

Allora p divide a_0 ($a_0 = k \cdot p$ con $k \in \mathbb{Z}$)
q " a_n ($a_n = h \cdot q$ " $h \in \mathbb{Z}$)

Oss: questo teorema garantisce che posto $N = \{p \in \mathbb{Z} : p \text{ divide } a_0\}$ $D = \{q \in \mathbb{Z} : q \text{ divide } a_n\}$ le possibili radici razionali di $a_n x^n + \dots + a_0$ sono della forma p/q con $p \in N$ e $q \in D$

dim

$$P\left(\frac{p}{q}\right)=0 \iff a_n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\dots+a_1\cdot\frac{p}{q}+a_0=0$$

$$\iff a_n\cdot p^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}\cdot p^{n-2}q^2+\dots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

i) Proviamo che p divide a_0

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\dots+a_1\cdot p\cdot q^{n-1}=-a_0q^n$$

$$p\underbrace{\left(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+a_{n-2}p^{n-3}q^2+\dots+a_1q^{n-1}\right)}_{k\in\mathbb{Z}}=-a_0q^n$$

$\Rightarrow p$ divide a_0q^n però p e q non hanno fattori comuni

$\Rightarrow$ " " " però p non divide q^n

$\Rightarrow p$ divide a_0 !

$$a_n\cdot p^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}\cdot p^{n-2}q^2+\dots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

ii) q divide a_n

$$-a_n\cdot p^n=a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\dots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n$$

$$=q\underbrace{\left(a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}q+\dots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1}\right)}_{h\in\mathbb{Z}}$$

$\Rightarrow q$ divide a_np^n ma q e p non hanno fattori comuni

$\Rightarrow q$ " a_n ////

Esempio

Determinare le radici di $X^3+3X-14=0$

dim

Le radici intere di $X^3+3X-14=0$ si trovano tra i divisori di -14, ovvero $\pm1, \pm2, \pm7$

$$P(2) = 2^3+3\cdot2-14=0$$

$\Downarrow$ Ruffini

$X-2$ è divisore di $X^3+3X-14$

$$\begin{array}{rrr|l} X^3 & +3X & -14 & X-2 \\ \cline{4-4} X^3 -2X^2 & & & X^2+2X+7 \\ \hline // \; 2X^2+3X & -14 & & \\ 2X^2-4X & & & \\ \hline // \; 7X-14 & & & \end{array}$$

$X^3+3X-14=(X-2)(X^2+2X+7)$

$$X_{2,3} = \frac{-2\pm\sqrt{4-28}}{2}$$

in $\mathbb{R}$ $\exists$ solo una radice $x=2$

Corollario $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dim

Posto $P(x)=X^2-2$, $P(\sqrt{2})=0$ però

le radici razionali di $P(x)$ sono della forma

p/q con p che divide -2, cioè $p\in\{\pm1,\pm2\}$

q " " 1 " $q\in\{\pm1\}$

ed essendo

$P(1)\neq0$ $P(-1)\neq0$ $P(-2)\neq0$ $P(2)\neq0$, si ha che non esistono radici razionali di $P(x)=0$ e dunque $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ $\square$

Esercizio provare che $\sqrt[3]{3}\notin\mathbb{Q}$

" " $\sqrt[2]{5}\notin\mathbb{Q}$

La differenza tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sta nell'esistenza o meno dell'estremo superiore

Assioma di Completezza

$\underbrace{\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}}$ con $\mathcal{M}_A = \{b : b \geq a \ \forall a \in A\} \neq \emptyset$

allora $\exists \sup A = \min \mathcal{M}_A$

Esempio

$A = [3,4]$ $\quad \mathcal{M}_A = [4, +\infty[$ $\quad \min \mathcal{M}_A = 4 = \sup A$

$B = [3,4[$ $\quad \mathcal{M}_B = [4, +\infty[$ $\quad \min \mathcal{M}_B = 4 = \sup B$

Oss: quando $\mathcal{M}_A = \emptyset$, ovvero A è illimitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$

Oss: cosa succede quando $A = \emptyset$??

$\sup \emptyset \overset{?}{=} -\infty$

dim $\emptyset$ è l'insieme $\mathcal{M}_\emptyset = \mathbb{R} \Rightarrow \min \mathbb{R}$ non esiste

$\Rightarrow \inf \mathbb{R} = \sup \phi = -\infty$

$\inf \phi = +\infty \qquad m_\phi = \{b : b \le a \ \forall a \in \phi\} = \mathbb{R}$

$\inf \phi = \max m_\phi = \max \mathbb{R} = +\infty$!

Teorema in $\mathbb{Q}$ non esiste sempre l'estremo superiore

dim

$B = \{q \in \mathbb{Q} ;\ q > 0,\ q^2 < 2\}$

1) $[\sqrt{2}, +\infty[\subset M_B = \{z \in \mathbb{R} : z > 0,\ z^2 \geq 2\}$ (banalmente vera)

2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (provata in precedenza)

3) $B \cap M_B = \phi$

Ne segue che $M_B = [\sqrt{2}, +\infty[$ e $\sup B = \min M_B = \sqrt{2}$

Proviamo la 3) provando che B non ha massimo

Infatti, preso $q \in B$

$$\left(q + \frac{1}{N}\right)^2 = q^2 + \frac{2q}{N} + \frac{1}{N^2} < q^2 + \frac{2q}{N} + \frac{1}{N} = q^2 + \frac{2q+1}{N}$$

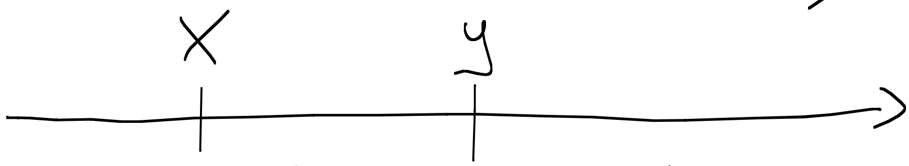
Se $q^2 + \frac{2q+1}{N} < 2$ allora $\frac{2q+1}{N} < 2 - q^2$ allora

allora $N > \frac{2q+1}{2-q^2}$

Fissato $q \in B \quad \exists N > \frac{2q+1}{2-q^2} : q + \frac{1}{N} \in B \qquad \square$

LA FUNZIONE MODULO

$$|x| = \max\{x,-x\} \left(= \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x\le 0 \end{cases} \right)$$



$$d(x,y) = \begin{cases} y-x & \text{se } y>x \\ x-y & \text{se } y\le x \end{cases} = |x-y|$$

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$$

1) $|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

2) $|x| \ge 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

3) $|x| = 0$ sse $x=0$

4) $|x| = |-x| \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

5) $-|x| \le x \le |x| \qquad$ "

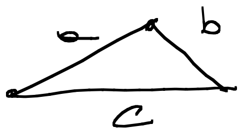
6) $|x| \le y$ sse $-y \le x \le y \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

7) $|x| \ge y$ sse $x \ge y$ o $-x \ge y \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

8) $|x+y| \le |x|+|y| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$ Disug. Triangolare

9) $\big||x|-|y|\big| \le |x-y| \qquad$ "

Oss la 8) deve il suo nome alla proprietà dei triangoli seguente



$$\begin{cases} a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases}$$

1) $|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dim

i) $x>0 \qquad |x| = \max\{x,-x\} = x$

$x=0 \qquad |0| = \max\{0,-0\} = 0$

$x<0 \qquad |x| = \max\{x,-x\} = -x$ ∎

2) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dim

$x>0 \qquad |x| = x > 0$

$x=0 \qquad |0| = 0$

$x<0 \qquad |x| = -x > 0$ ∎

3) $|x| = 0$ sse $x=0$

dim

$x=0 \Rightarrow |x| = |0| = 0$

contronominale dice $x \neq 0 \Rightarrow |x|>0$ (dovevo provare $|x|=0 \Rightarrow x=0$)

$$x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \Rightarrow |x| = x > 0 \\ x<0 \Rightarrow |x| = -x > 0 \end{cases} \Rightarrow |x|>0$$ ∎

4) $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = \max\{x,-x\} = \max\{-x,-(-x)\} = |-x|$ ∎

5) $-|x| \leq x \leq |x|$

dim

i) $|x| = \max\{x,-x\} \geq x$

ii) $|x| = \max\{x,-x\} \geq -x \Rightarrow -|x| \leq x$ ∎

6) $|x| \leq y$ sse $-y \leq x \leq y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

dim

$$|x| \leq y \Leftrightarrow \max\{x,-x\} \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq y \\ x \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -y \\ x \leq y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ ∎

7) $|x| \geq y$ se $x \geq y$ o $-x \geq y$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

dim

$|x| \geq y$ se $\max\{x, -x\} \geq y$ se $x \geq y$ o $-x \geq y$ ■

8) $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

dim

$$\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \\ \hline -|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y| \end{array} \implies |x+y| \leq |x|+|y| \quad ■$$

9) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

dim

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \implies$$
$$|y| = |(y-x)+x| \leq |x-y| + |x| \implies |y|-|x| \leq |x-y| \implies \begin{cases} |x|-|y| \leq |x-y| \\ |x|-|y| \geq -|x-y| \end{cases}$$

$$\implies -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y| \implies \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad ■$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

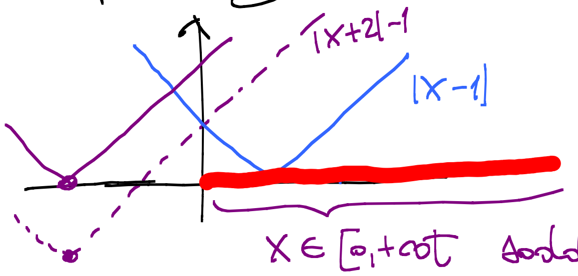
$|x-3| = |2x-3| - 2$

$|x-1| = |x+2| - 1$

$|x-1| \geq 3 - x$

(suggerimento: soluzione analitica ricordando che $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 > 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 \leq 0 \end{cases}$

oppure grafica osservando che



$x \in [0, +\infty)$ soddisfa $|x+2|-1 > |x-1|$)