Analisi Matematica 1 - CdL in Matematica e Fisica
Prova scritta del 20 settembre 2016 1

Correzione

Esercizio 1. Calcolare per $n = 1$ e $n = 2$ il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \left(e^{1/x} - e^{1/(x+x^2)}\right).$$

posto $y = 1/x$ il limite diventa $\left[1/(1/y + 1/y^2)\right] = \left[y^2/(y+1)\right]$

$$\lim_{y\to0^+} \frac{1}{y^n}\cdot\left(e^y - e^{y^2/(y+1)}\right)$$

$$= \lim_{y\to0^+} \frac{1}{y^n}\left(e^y - e^{y^2+o(y^2)}\right) = \lim_{y\to0^+} \frac{1}{y^n}\left(\cancel{1}+y+\frac{y^2}{2} - \cancel{1} - y^2 + o(y^2)\right)$$

$$= \lim_{y\to0^+} \frac{1}{y^n}\left(y + o(y^2)\right)$$

e quindi se $n=1$ allora il limite vale 1
se $n=2$ allora il limite vale $+\infty$

Esercizio 2. Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x^2 + e^x(x-1) = 0.$$

Data la funzione $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + x,$$

tracciarne il grafico qualitativo, evidenziando gli eventuali asintoti.

Posto $g(x) = x^2 + e^x(x-1)$ si ha $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
e dunque, essendo g continua su $\mathbb{R}$, esiste un punto di minimo per g. Si ha poi $g'(x) = 2x + e^x(x-1) + e^x$
$= 2x + xe^x = x(2+e^x)$

e dunque $g'(x) = 0$ se $x = 0$ e $g'(x) \begin{cases} <0 & \text{se } x<0 \\ >0 & \text{se } x>0 \end{cases}$

ovvero $(0, -1)$ è punto di minimo relativo per

$f(x)$ e si ha $f(0) = -e^0 = -1$ (essendo l'unico punto trovato, è un minimo assoluto)

Quindi $f(x) \begin{cases} \text{decrescente se } x < 1 \\ \text{crescente se } x > 1 \end{cases}$ e allora

le intersezioni tra $y = f(x)$ e $y = 0$ sono quindi 2, una con ascissa < 1, una con ascissa > 2.

$f(x) = \dfrac{e^x}{x} + x$ ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Inoltre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Asintoti: per $x \to -\infty$ $\left(f(x) - x\right) = \dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, e dunque

$y = x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

Quando $x \to +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2} + 1\right) = +\infty$

e dunque $\nexists$ asintoti per $x \to +\infty$

Infine $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ovvero $x = 0$ è un asintoto verticale

Studiamo la monotonia: $f'(x) = -\frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} + 1$

$$= \frac{-e^x + xe^x + x^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + e^x(x-1)}{x^2} = 0$$

e si ha $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ e

si ha $f'(x) = 0$ <u>se</u> $x^2 + e^x(x-1) = 0$ <u>se</u> $x = x_1 < 0$

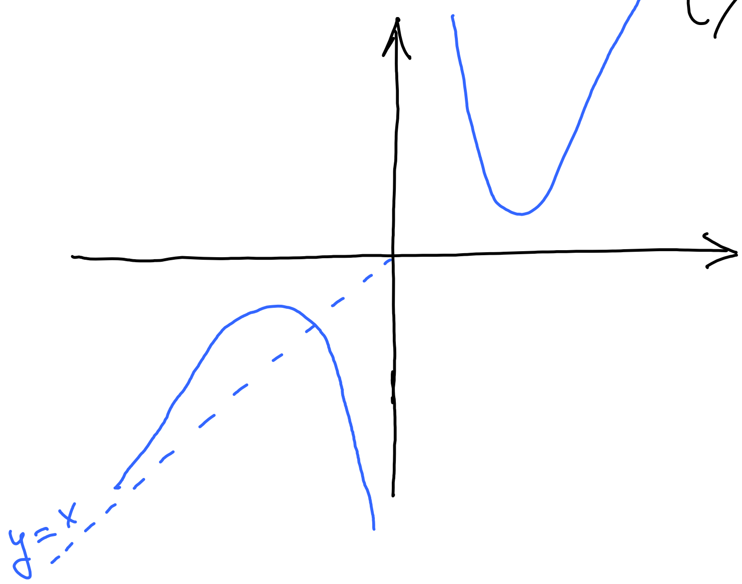
o $x = x_2 > 0$

e dunque $f'(x) \begin{cases} > 0 & x < x_1 \\ < 0 & x_1 < x < 0 \\ < 0 & 0 < x < x_2 \\ > 0 & x_2 < x \end{cases}$

x_1 p.to di max loc.

x_2 " " min loc.

da cui segue $f(x) \begin{cases} \nearrow & x < x_1 \\ \searrow & x_1 < x < x_2, \; x \neq 0 \\ \nearrow & x_2 < x \end{cases}$



Esercizio 3. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza delle serie numeriche

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\alpha n}}{n(1+7^n)}; \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{\alpha n}}{n(1+7^n)}.$$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = \dfrac{10^{\alpha n}}{n(1+7^n)}$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha $a_n > 0$

e dunque ho senso usare criterio della radice n-esima

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{10^\alpha}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1+7^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{10^\alpha}{7}$$

La serie converge se $\frac{10^\alpha}{7} < 1$ se $10^\alpha < 7$ se $\alpha < \log_{10} 7$

se $\alpha < \dfrac{\ln 7}{\ln 10}$ $\left(\text{poiché } 10^\alpha = e^{\alpha \ln 10} < e^{\ln 7}\right)$

La serie diverge quando $\alpha > \dfrac{\ln 7}{\ln 10}$

Quando $\alpha = \dfrac{\ln 7}{\ln 10}$, $a_n = \dfrac{7^n}{n(1+7^n)} \sim \dfrac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

ed essendo $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge quando $\alpha = \ln 7/\ln 10$

Riassumendo: la serie converge quando $\alpha < \ln 7/\ln 10$

" " diverge " $\alpha \geq \ln 7/\ln 10$

ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n = \dfrac{10^{\alpha n}}{n(1+7^n)}$

converge assolutamente (e quindi converge) quando $\alpha < \ln 7/\ln 10$: vedi il punto i).

Quando $\alpha = \ln 7/\ln 10$ la successione

$$a_n = \frac{7^n}{n(1+7^n)} = \frac{1}{n(1+7^{-n})}$$

- è a termini positivi
- è decrescente per $n > \bar{n}$ (ovvero esiste $\bar{n} > 0$ tale che $(a_n)_n$ è decrescente per $n > \bar{n}$)

Proviamo che $b_n = (1+7^{-n}) \cdot n$ è crescente per $n > \bar{n}$

Pongo

$$f(x) = x(1+7^{-x}) \qquad f' = 1+7^{-x} + x \cdot 7^{-x} \cdot (-\ln 7)$$
$$= 1 + 7^{-x}(1 - x\ln 7) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce da un certo valore di $x > 0$

e quindi $f(n)$ crescente e quindi $a_n \searrow$

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+7^{-n}} = 0 \cdot 1 = 0$

Dunque per il Criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n(1+7^n)} \cdot (-1)^n$ (che è a termini di segno alterno) converge

Quando $\alpha > \ln 7 / \ln 10$ si ha che $\left(\frac{10^\alpha}{7}\right) > 1$ e perciò

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{10^{\alpha n}}{n(1+7^n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{10^\alpha}{7}\right)^n \underset{(*)}{=} +\infty$$

e dunque la serie non converge poiché il suo termine generale NON tende a zero

(*) $\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty$ quando $q > 1$

infatti $\sqrt[n]{\frac{q^n}{n}} = \frac{q}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} q > 1 \underset{\text{criterio radice}}{\Rightarrow} \lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty$

Esercizio 4. Calcolate l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$.

Cerco una primitiva di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$\int f(x)\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{x} \\ dx = 2y\,dy}}{=} \left(\int \frac{1}{\cancel{y}} \ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right) 2\cancel{y}\,dy\right)_{y=\sqrt{x}}$$

$$= \left(2y \ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right) - \int 2y \cdot \frac{1}{1+1/y^2} \cdot \left(-\frac{2}{y^3}\right) dy\right)_{y=\sqrt{x}}$$

$$= \left(2y \ln\left(1+1/y^2\right) + 4 \int \frac{1}{y^2+1}\,dy\right)_{y=\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Quindi possiamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \left[2\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right] - \lim_{x\to 0} \left[2\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]$$

$$= 2\pi + \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - \lim_{x\to 0} 2\sqrt{x} \ln(1+x) + \lim_{x\to 0} 2\sqrt{x} \ln x$$

$$= 2\pi$$