COGNOME ______	NON SCRIVERE QUI
NOME ______	1 2 3 4
MATRICOLA	
CORSO MATEMATICA FISICA	

UNIVERSITÀ DI PARMA— CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2015-2016 — PARMA, 6 SETTEMBRE 2016

Il tempo massimo per svolgere la prova è di 3 ore (180 minuti). Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento). Al termine della prova riconsegnate questo foglio insieme a tutti i fogli ricevuti. Le parti che non volete siano valutate (la "brutta copia") vanno barrate.

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{e^{2t}}{e^{4t} + 2e^{2t} + 2} + e^{t} \ln(e^{t} + 2) \right) dt.$$

Risposta:

ntegrazione indefinita: $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{e^{4t}+2e^{2t}+2}\,dt \underset{(x=e^{2t})}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctg}(x+1) + c$

$\displaystyle\int e^{t}\ln(e^{t}+2)\,dt \underset{(x=e^{t})}{=} \int \ln(x+2)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per parti}}}{=} (x+2)\ln(x+2) - x + c$

$$\int_{-\infty}^{0} \dots\, dt = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \dots\, dt = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\text{arctg}(e^{2t}+1) + (e^{t}+2)\ln(e^{t}+2) - e^{t} \right]_{a}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg}\,2 + 3\ln 3 - 1 - \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\text{arctg}(e^{2a}+1) + (e^{a}+2)\ln(e^{a}+2) - e^{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg}\,2 + \ln 27 - 1 - \left[\frac{1}{2}\text{arctg}\,1 + 2\ln 2\right] = \frac{1}{2}\text{arctg}\,2 - \frac{\pi}{8} + \ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1$$

Esercizio 2. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{x \ln |x|}{1 + \ln^2 |x|}.$$

(a) Determinare dominio, eventuali simmetrie e limiti agli estremi del dominio della funzione f;
(b) verificare che f è prolungabile con continuità in $x = 0$; sia $\tilde{f}$ il prolungamento di f in $x = 0$: esiste $D\tilde{f}$ - la derivata di $\tilde{f}$ - in $x = 0$? È continua $D\tilde{f}$ in $x = 0$?;
(c) studiare gli intervalli di monotonia di f; determinare la natura dei punti stazionari di f;
(d) tracciare il grafico di f (non è richiesta la derivata seconda).

Risposta:

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(-x) = -f(x)$, f dispari.

Dato che $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0$ (ad esempio con Hôpital), $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{1 + \ln^2 x} = \frac{0}{+\infty} = 0$

Dato che f è dispari, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{1 + \ln^2 x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x \ln x}}_{0^+} + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0^+}} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} f(-y) = -\lim_{y \to +\infty} f(y) = -\infty$.

Eventuale asintoto obliquo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x} = 0$. Non ci sono A. O.

b) Dato che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, la funzione $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è continua.

Considero $x > 0$, $f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1 + \ln^2 x) - 2 \ln^2 x}{(1 + \ln^2 x)^2} = \frac{\ln^3 x - \ln^2 x + \ln x + 1}{(1 + \ln^2 x)^2}$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{\ln^3 x}\left[1 - 1/\ln x + \frac{1}{\ln^2 x} + \frac{1}{\ln^3 x}\right]}{\ln x \, \cancel{\ln^4 x} \cdot \left(\frac{1}{\ln^2 x} + 1\right)^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

Sempre per simmetria, $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$. Dunque $\exists \lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

Questo prova che $\tilde{f}$ è derivabile in $x = 0$, con $\tilde{f}'(0) = 0$ e derivata continua.

Nota: la derivata $\tilde{f}'(0)$ poteva ~~essere~~ calcolata anche con la definizione,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln|x|}{1 + \ln^2|x|} = 0.$$

SEGUE →

(c) Per la simmetria di f, mi limito a considerare $x>0$.

$$f'(x) = \frac{\ln^3 x - \ln^2 x + \ln x + 1}{(1+\ln^2 x)^2}.$$ Dato che $(1+\ln^2 x)^2 > 0 \quad \forall x>0$,

esamino il segno del num. $\ln^3 x - \ln^2 x + \ln x + 1$.

Pongo $z = \ln x$ e $P(z) = z^3 - z^2 + z + 1$.

Si ha $P'(z) = 3z^2 - 2z + 1$, con $\frac{\Delta}{4} = 1 - 3 < 0$. Quindi $P'(z) > 0 \ \forall z$

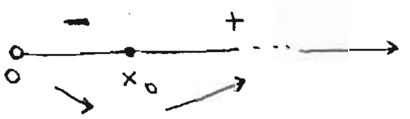
Ne risulta che $P(z)$ è un polinomio di 3° grado strett. crescente.

Quindi $\exists$ un unico valore z_0 t.c. $P(z_0) = 0$.

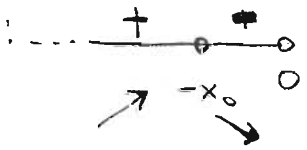
Inoltre $P(0) = 1$, quindi $z_0 < 0$.

$\exists$ allora un unico valore positivo x_0, con $x_0 < 1$, t.c.

$\ln x_0 = z_0$, in cui $f'(x_0) = 0$.

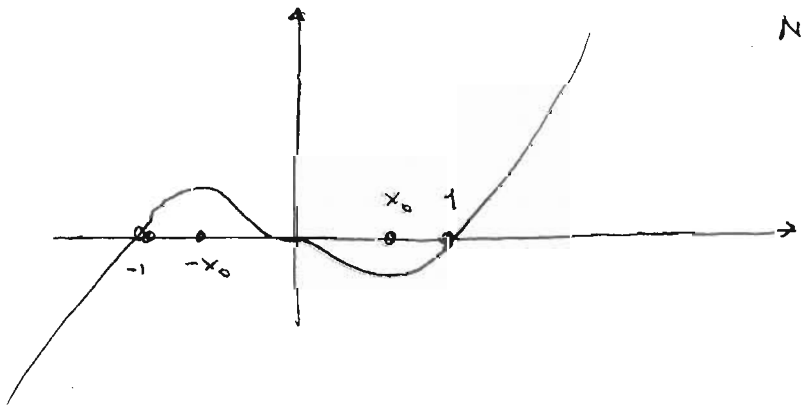
f' 

x_0 è punto di min. relativo.

Per simmetria: 

$-x_0$ è punto di max. relativo.

(d) Grafico



Nota: $f(1) = 0$.

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} - \cos(\sin x).$$

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di f per $x \to 0$;
(b) studiare, al variare di $\alpha > 0$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n^{-\alpha}).$$

Risposta:

(a) Partendo da $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$, con la sostituzione $t = -x^2$,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4); \quad x \to 0$$

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4!} + o(x^4), \quad x \to 0$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Quindi $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4\right) + o(x^4) = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$

$x \to 0$.

Ord. di inf.simo: 4 ; parte princ. $-\frac{1}{3}x^4$.

(b) Dato che $n^{-\alpha} \to 0$, se $\alpha > 0$, si ha $f(n^{-\alpha}) \sim -\frac{1}{3} n^{-4\alpha}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4\alpha}}$ converge solo se $4\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{4}$.

Per confronto asintotico, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^{-\alpha})$ converge solo se $\boxed{\alpha > \frac{1}{4}}$

Esercizio 4. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale,

$$y^{(4)}(x) + 8y'(x) = e^{\sqrt{3}x}.$$

Risposta:

Int. gen. omogenea: $y^{(4)} + 8y' = 0$. Eq. caratt.: $\lambda^4 + 8\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda\cdot(\lambda^3+8) = 0. \Leftrightarrow \lambda = 0$ opp. $\lambda^3+8 = 0$.

Risoluzione di $\lambda^3+8=0$ in campo complesso: $\lambda^3 = -8 \Leftrightarrow \lambda^3 = 8e^{i\pi}$

$\Rightarrow \lambda_n = \sqrt[3]{8}\, e^{i\frac{\pi+2n\pi}{3}}$ $n = 0,1,2$

$\Rightarrow \lambda_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\cdot\left(\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3)\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

$\lambda_1 = 2e^{i\pi} = -2$

$\lambda_2 = \bar{\lambda}_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

$$\boxed{c_0 + c_1 e^{-2x} + \left(c_2\cos(\sqrt{3}x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)\right)e^x}$$ $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(t

Sol. particolare dell'eq. completa: dato che $\sqrt{3}$ non è radice dell'eq. caratt., cerchiamo $\bar{y}(x) = Ae^{\sqrt{3}x}$

$\bar{y}^{(4)} + 8\bar{y}' = \left(A\cdot(\sqrt{3})^4 + 8A\cdot\sqrt{3}\right)e^{\sqrt{3}x} = (9+8\sqrt{3})\cdot Ae^{\sqrt{3}x}$.

$\Rightarrow A = \frac{1}{9+8\sqrt{3}}$

Sol. $$\boxed{c_0 + c_1 e^{-2x} + \left(c_2\cos(\sqrt{3}x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)\right)e^x + \frac{1}{9+8\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x}}$$

$c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$