COGNOME ____________________

NOME ____________________

MATRICOLA

CORSO MATEMATICA FISICA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4

UNIVERSITÀ DI PARMA— CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2015-2016 — PARMA, 7 LUGLIO 2016

Il tempo massimo per svolgere la prova è di 3 ore (180 minuti). Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento). Al termine della prova riconsegnate questo foglio insieme a tutti i fogli ricevuti. Le parti che non volete siano valutate (la "brutta copia") vanno barrate.

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x^3+x} + x^4, \quad x > 0.$$

Risposta:

Eq. lin. del primo ordine $y' = a(x)y + b(x)$.

Formula risolutiva: $y(x) = e^{A(x)} \cdot \left\{ c + \int e^{-A(x)} b(x)\,dx \right\}, \quad A'(x) = a(x).$

Calcolo $A(x)$: $\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$

$\Rightarrow A(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$. Quindi $e^{A(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad e^{-A(x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$

$\Rightarrow y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left\{ c + \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \cdot x^4\,dx \right\} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left\{ c + \int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx \right\}, \quad c \in \mathbb{R}$

Calcolo $\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx$ con la sostituzione $t = x^2+1$ $\left(\begin{array}{l} dt = 2x\,dx \\ x^2 = t-1 \end{array} \right)$

$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int (t-1)\cdot\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(t^{3/2} - t^{1/2}\right)dt = \frac{1}{5}t^{5/2} - \frac{1}{3}t^{3/2} + c$

$= \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$

SOLUZIONE: $y(x) = \frac{cx}{\sqrt{x^2+1}} + x \cdot \left[\frac{1}{5}(x^2+1)^2 - \frac{1}{3}(x^2+1) \right] =$

$= \frac{cx}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{15} + \frac{2}{15}x, \quad c \in \mathbb{R}$

Esercizio 2. Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.

a) Scrivere lo sviluppo di Taylor di f, centrato in $x = 0$, di ordine 3.

b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \cos(\alpha x)}{x^3}.$$

Risposta:

per $x \to 0$

$$e^x + e^{-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2 + x^2 + o(x^3),$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{2 + x^2 + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ = polinomio di Taylor ordine 3 di f centrato in $x_0 = 0$

$$\cos \alpha x = 1 - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^3).$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \cos \alpha x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} \cancel{-1} + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}(\alpha^2 - 1) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}(\alpha^2 - 1) + o(1)\right]$$

e dunque il limite è finito ($= 0$)

sse $\alpha^2 - 1 = 0$ sse $\alpha = \pm 1$

Esercizio 3. Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{xe^x + 1}{2e^x - 1}$.

a) Dimostrare che $xe^x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
b) Determinare il campo di esistenza, il segno e gli asintoti di f.
c) Dimostrare che f ha un punto di massimo relativo e un punto di minimo relativo.
d) Tracciare un grafico approssimativo della funzione f (non e' richiesto il calcolo di f'').

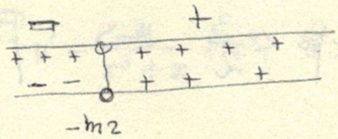
Risposta:

a) Posto $g(x) = xe^x + 1$, si ha $g'(x) = e^x + xe^x = e^x \cdot (x+1)$.

g ha minimo assoluto per $x = -1$, $m = -e^{-1} + 1 > 0$.

b) C.E. $2e^x - 1 \neq 0$. Si ha $2e^x - 1 = 0 \iff x = -\ln 2$.
$D = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.

Segno $xe^x + 1$, $2e^x - 1$



$f(x) > 0$ per $x > -\ln 2$
$f(x) < 0$ per $x < -\ln 2$.

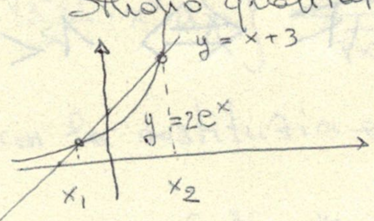
limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ $\quad \lim_{x \to -\ln 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Asinto obliquo per $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x}{(2e^x - 1)2} = 0$

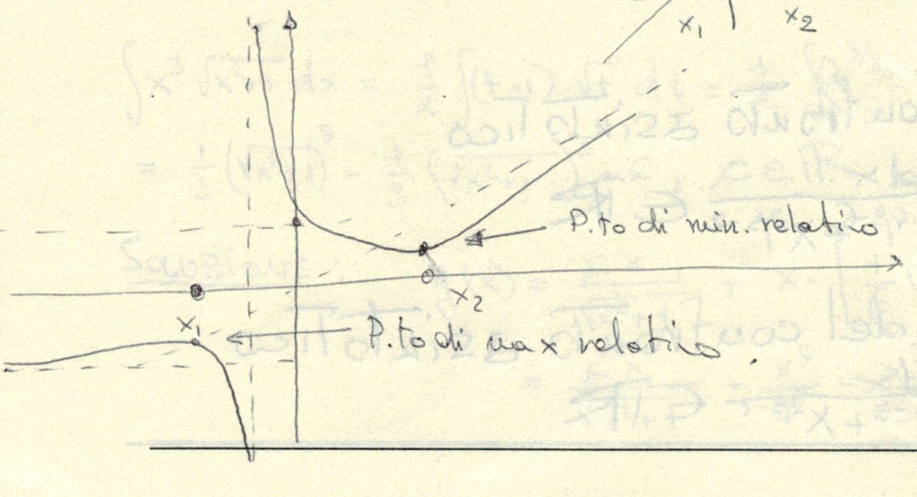
Quindi $y = \frac{x}{2}$ asint. obliquo per $x \to +\infty$
$y = -1$ " " orizz. " " $x \to -\infty$
$x = -\ln 2$ " " verticale.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (2e^x - x - 3)}{(2e^x - 1)^2}.$$

Studio qualitativo del segno di f'



$f'(x_{1,2}) = 0$
$f'(x) > 0 \iff x < x_1$ o $x > x_2$
$f'(x) < 0 \iff x_1 < x < x_2$



Oss: $g(x) = 2e^x - x - 3$
$\lim_{x \to \pm\infty} g = +\infty \Rightarrow \exists \min g(\mathbb{R})$
$g' = 2e^x - 1 = 0 \iff x = \ln \frac{1}{2}$
e $g(\ln \frac{1}{2}) = 1 - \ln \frac{1}{2} - 3 < 0$
$\Rightarrow \exists\, x_1 < \ln \frac{1}{2} < x_2$ t.c.

$\left.\begin{array}{l} x_1 \text{ p.to max locale} \\ x_2 \text{ " min locale} \end{array}\right\}$ per f

Esercizio 4. Determinare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)\arctan(x^2)}{x^{4\beta-4}+x^{2\beta}}\,dx.$$

Risposta:

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$. $\quad f$ continua in $(0,+\infty)$.

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ conv. $\iff \int_0^1 f(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ convergono.

(1) $\quad x \to 0 \quad f(x) \sim \dfrac{x^2}{x^{4\beta-4}+x^{2\beta}} = \dfrac{1}{x^{4\beta-6}+x^{2\beta-2}}$.

$(*)\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{4\beta-6}+x^{2\beta-2}}dx$ conv. $\iff 4\beta-6<1$ oppure $2\beta-2<1$

$\iff \beta < \frac{7}{4}$ oppure $\beta < \frac{3}{2} \iff \beta < 7/4$

(2) $\quad x \to +\infty \quad f(x) \sim \dfrac{\pi}{2}\cdot \dfrac{x}{x^{4\beta-4}+x^{2\beta}} = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{4\beta-5}+x^{2\beta-1}}$

$(**)\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{4\beta-5}+x^{2\beta-1}}dx \in \mathbb{R} \iff 4\beta-5>1$ oppure $2\beta-1>1$

$\iff \beta > 1$ oppure $\beta > 1 \iff \beta > 1$

Dunque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R} \iff 1 < \beta < \frac{7}{4}$

$(*)$ Per il Teorema del confronto asintotico

$\displaystyle\int_0^1 f dx \in \mathbb{R} \iff \int_0^1 \frac{dx}{x^{4\beta-6}+x^{2\beta-2}} \in \mathbb{R}$

$(**)$ Per il Teorema del confronto asintotico

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f dx \in \mathbb{R} \iff \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{dx}{x^{4\beta-5}+x^{2\beta-1}} \in \mathbb{R}$