Analisi Matematica 1 - a.a. 2015-16
C.d.L. in Matematica - C.d.L. in Fisica
Correzione della prova scritta del 28 giugno 2016

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) + 16y(x) = \cos(x).$$

L'equazione omogenea associata è $y^{(IV)}+16y=0$ e la corrispondente equazione caratteristica è

$$\lambda^4+16=0 \iff \lambda^4=-16=2^4\cdot(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)$$

$$\iff \lambda_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ \lambda_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ \lambda_3=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ \lambda_4=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

a cui corrispondono le 4 soluzioni reali

$$e^{\sqrt{2}\cdot x}\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)\ ;\ e^{\sqrt{2}\cdot x}\cdot\mathrm{sen}(\sqrt{2}\cdot x)\ ;\ e^{-\sqrt{2}\cdot x}\cos(\sqrt{2}\cdot x)\ ;\ e^{-\sqrt{2}\cdot x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\cdot x)$$

e quindi

$$y_0(x)=c_1e^{x\sqrt{2}}\cos(x\sqrt{2})+c_2e^{x\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(x\sqrt{2})+c_3e^{-x\sqrt{2}}\cos(x\sqrt{2})+c_4e^{-x\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(x\sqrt{2})$$

$$\forall c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$$

è l'integrale generale dell'equazione omogenea (l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata)

Resta da determinare una soluzione (una soluz. particolare) dell'equazione $y^{(IV)}+16y=\cos x$

A tal fine cerchiamo una soluzione della forma

$\sigma(x)=a\cos x+b\,\mathrm{sen}\,x$ $\qquad$ $\sigma'''=a\,\mathrm{sen}\,x-b\cos x$

$\sigma'=-a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x$ $\qquad$ $\sigma^{(IV)}=a\cos x+b\,\mathrm{sen}\,x=\sigma$

$\sigma''=-a\cos x-b\,\mathrm{sen}\,x$ $\qquad$ e sostituendo

$$a\cos x+b\,\mathrm{sen}\,x+16(a\cos x+b\,\mathrm{sen}\,x)=\cos x$$

$$17a\cos x + 17 b \operatorname{sen} x = \cos x \iff a = \frac{1}{17} \quad b = 0$$ 2

ovvero $y_p(x) = \frac{1}{17}\cos x$

$y_g(x) = y_0(x) + y_p(x) =$ (integrale generale dell'equazione)

$$= c_1 e^{x\cdot\sqrt{2}}\cos(x\sqrt{2}) + c_2 e^{x\sqrt{2}}\operatorname{sen}(x\sqrt{2}) + c_3 e^{-x\sqrt{2}}\cos(x\sqrt{2}) + c_4 e^{-x\sqrt{2}}\operatorname{sen}(x\sqrt{2}) + \frac{\cos x}{17}$$

$\forall c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Esercizio 2. Sia data la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{2x-1}} - e^{\frac{1}{2x+1}}$.
a) Determinare, per $x \to +\infty$, l'ordine di infinitesimo di $f(x)$.
b) Determinare i valori di $\alpha > 0$ per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n^\alpha).$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2x}}} - e^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}}$$

quando $x \to +\infty$ si ha che $\frac{1}{2x} = y \to 0$

$$g(y) = e^{y\cdot\frac{1}{1-y}} - e^{y\frac{1}{1+y}} \qquad y \to 0^+$$

$$= e^{y(1+y+y^2+o(y^2))} - e^{y(1-y+y^2+o(y^2))}$$

$$= \cancel{1} + [y+y^2+y^3] + \frac{1}{2}[y+y^2]^2 + \frac{y^3}{6} + o(y^3) - \{\cancel{1} + [y-y^2+y^3] + \frac{1}{2}[y-y^2]^2 + \frac{y^3}{6}\}$$

$$= \cancel{y} + y^2 + \cancel{y^3} + \cancel{\frac{y^2}{2}} + y^3 + \cancel{\frac{y^3}{6}} - \cancel{y} + y^2 - \cancel{y^3} - \cancel{\frac{y^2}{2}} + y^3 - \cancel{\frac{y^3}{6}} + o(y^3)$$

$$= 2y^2 + 2y^3 + o(y^3) = 2y^2 + o(y^2) \qquad y \to 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad x \to +\infty$$

ordine$(f) = 2$ $\qquad$ P.P.$(f) = \frac{1}{2x^2}$

$$a_n = f(n^\alpha) = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

Ne segue che $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^\alpha) \in \mathbb{R}$ se $2\alpha > 1$

se $\alpha > 1/2$

Esercizio 3. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + 5x + k.$$

a) Tracciare, per $k = 0$ e $k = -1$, un grafico approssimativo di f.
b) Trovare i valori di k per cui la retta $y = x$ è tangente al grafico di f_k.
c) In corrispondenza ai valori trovati nel punto b), studiare il comportamento della successione

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La funzione è definita $\forall x \neq 0$ e si ha, $\forall k \in \mathbb{R}$

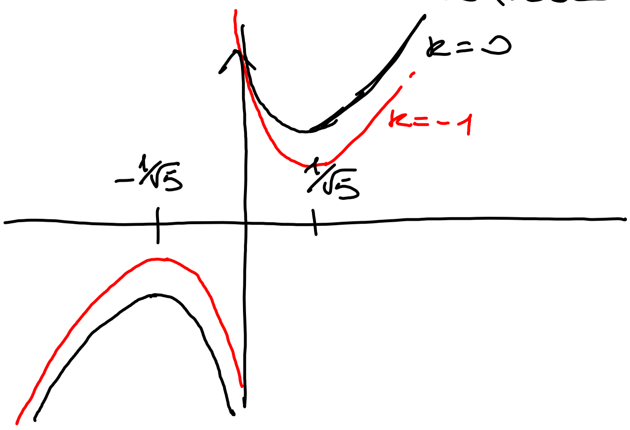
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Inoltre $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 5 = \frac{5x^2-1}{x^2}$ $\begin{cases} >0 & x < -1/\sqrt{5} \\ <0 & -1/\sqrt{5} < x < 1/\sqrt{5} \\ >0 & 1/\sqrt{5} < x \end{cases}$

ovvero $f(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5} - \sqrt{5} + k$ è un max locale

$f(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5} + \sqrt{5} + k$ " " min locale

Per la derivata seconda $f''(x) = +\frac{2}{x^3}$ $\begin{cases} <0 & \text{se } x<0 \\ >0 & \text{se } x>0 \end{cases}$



Una volta tracciato il grafico di $f(x)$ per $k=0$ il grafico corrispondente a $k=-1$ si ottiene con una traslazione verticale

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 5 = 1 = (x)' \iff \frac{1}{x^2} = 4 \iff x = \pm\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 5\cdot\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \iff 2 + \frac{4}{2} + k = 0 \iff k = -4$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{2} \iff -2 - \frac{4}{2} + k = 0 \iff k = 4$$

Dunque $f_1(x) = \frac{1}{x} + 5x - 4$ nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è tangente a $y = x$

$f_2(x) = \frac{1}{x} + 5x + 4$ " " $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ " " $y = x$

Studiamo

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 5a_n - 4 \end{cases}$$

scriviamo alcuni termini

$$a_0 = 1 < a_1 = 6 - 4 = 2 < a_2 = \frac{1}{2} + 10 - 4 = \frac{13}{2} < a_3 = \frac{2}{13} + \frac{57}{2} = \frac{741}{26}$$

Proviamo che $a_n \geq 1 \ \forall n \geq 0$

$a_0 = 1 \geq 1$ vero

supponiamo $a_n \geq 1$ (ipotesi induttiva)

$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 5a_n - 4 \geq 1 + \frac{1}{a_n} \geq 1$ e quindi è vera $\forall n \geq 0$

Proviamo che $a_{n+1} > a_n \ \forall n \geq 0$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 5a_n - 4 > a_n \iff$$

$$\frac{5a_n^2 - a_n^2 - 4a_n + 1}{a_n} = \frac{(2a_n - 1)^2}{a_n} > 0 \ \forall n$$

in quanto $a_n \geq 1 > \frac{1}{2}$ per il punto precedente

dunque $\exists \ \ell = \lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Se $\ell \in \mathbb{R}$ allora $\ell = \frac{1}{\ell} + 5\ell - 4$ allora $\frac{4\ell^2 - 4\ell - 1}{\ell} = \frac{(2\ell - 1)^2}{\ell} = 0$

allora $\ell = \frac{1}{2}$ impossibile poiché $\ell \geq 1$

Ne segue $\ell = +\infty$

In modo perfettamente analogo si prova $b_n \to +\infty$ dove

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{b_n} + 5b_n + 4 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia data la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := \int_0^x \frac{|t-1|t}{1+t^{12}}\, dt.$$

a) Determinare i valori di x per cui la funzione è derivabile.
b) Stabilire se esistono finiti i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} F(x)$.
c) Tracciare un grafico approssimativo di $F(x)$ evidenziandone il segno, i massimi e minimi e gli intervalli di monotonia.

La funzione integranda $f(t) = \dfrac{t\,|t-1|}{1+t^{12}}$ è continua $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale $F(x)$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e si ha

$$F'(x) = f(x) = \frac{x\,|x-1|}{1+x^{12}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$$ in quanto

$f(x) \sim \dfrac{x^2}{x^{12}} = \dfrac{1}{x^{10}}$ per $x \to +\infty$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{10}} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ ma $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,dt \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \int_0^{-\infty} f(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt - \int_{-1}^{0} f(t)\,dt$$

ma $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ (vedi l'argomento utilizzato per provare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$)

$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ (f.ne $f(t)$ continua su $[-1,0]$ chiuso e limitato)

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) \in \mathbb{R}$

$y=F(+\infty)$ asintoto orizzontale per F quando $x\to+\infty$
$y=F(-\infty)$ " " " " " $x\to-\infty$

Segno: quando $x>0$ $\quad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt>0$

infatti, $F(0)=0$ $\quad F'(x)=f(x)=\dfrac{x\,|x-1|}{1+x^{12}}>0 \quad \forall x\neq 1,\ x>0$

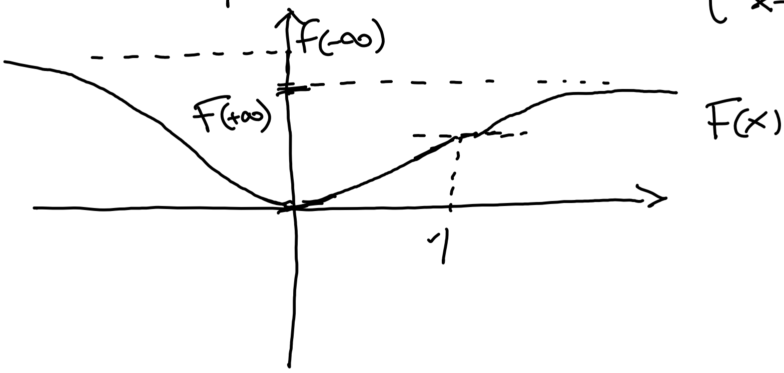
$\Rightarrow F(x)$ è crescente per $x>0 \Rightarrow F(x)>0\ \forall x>0$

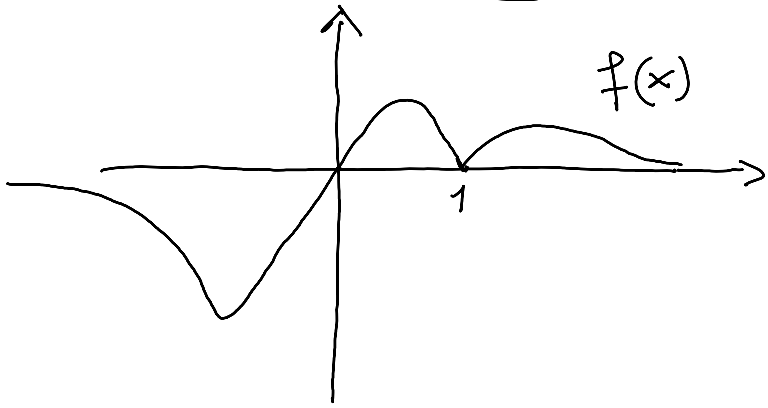
quando $x<0$ $\quad F(x)>0$
infatti $F(0)=0$ $\quad F'(x)=f(x)=\dfrac{x\cdot|x-1|}{1+x^{12}}<0 \quad \forall x<0$

$\Rightarrow F(x)$ è decrescente per $x<0 \Rightarrow F(x)>0\ \forall x>0$

Ne segue che $F(0)=0=\min F(\mathbb{R})$ mentre

$$\sup F(\mathbb{R})=\max\left\{\lim_{x\to+\infty}F(x)\,;\,\lim_{x\to-\infty}F(x)\right\}\in\mathbb{R}$$





Si può provare che $F(-\infty)>F(+\infty)$.