Analisi Matematica 1 - a.a. 2015-16
CdL in Matematica - CdL in Fisica
Correzione della 2° prova parziale del 13-06-2016

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(x) + 8y(x) = e^x + x.$$

L'equazione omogenea $y''' + 8y = 0$ associata ha come equazione caratteristica $\lambda^3 + 8 = 0$ che ha le tre soluzioni

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}\, i \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}\, i$

a cui corrispondono le funzioni

$e^x \cos(\sqrt{3} \cdot x) \qquad e^{-2x} \qquad e^x \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, x)$

e dunque $y(x) = c_1 e^x \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^x \operatorname{sen} \sqrt{3} x + c_3 e^{-2x}$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

è l'integrale generale dell'equazione omogenea

Soluzione particolare di $y''' + 8y = e^x$

Osserviamo che e^x non soddisfa l'equazione omogenea, e dunque possiamo cercare una soluzione particolare del tipo $v(x) = k e^x$. Da $v''' + 8v = e^x$ si ottiene

$$k e^x + 8k e^x = e \implies k = 1/9 \implies y_{p_1} = \frac{1}{9} e^x \text{ è soluzione particolare di } y''' + 8y = e^x$$

Soluzione particolare di $y''' + 8y = x$

Osserviamo che x non soddisfa l'equazione omogenea, e dunque possiamo cercare una soluzione particolare del tipo $\sigma(x) = ax+b$. Da $\sigma''' + 8\sigma = x$ si ottiene

$8ax + 8b = x \Rightarrow b = 0 \quad a = 1/8 \Rightarrow y_{P,2} = \frac{x}{8}$ è soluzione particolare di $y''' + 8y = x$

Dunque $y_g(x) = y_0(x) + y_{P,1}(x) + y_{P,2}(x) =$

$$= c_1 e^x \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^x \sin(\sqrt{3}x) + c_3 e^{-2x} + \frac{e^x}{9} + \frac{x}{8}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(\alpha-3)^{2n}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{n}+3)^{\alpha}} \right).$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è a termini positivi e $a_n = b_n + c_n$ dove $b_n = \frac{1}{(\alpha-3)^{2n}}$ $\quad c_n = \frac{1}{(\sqrt[3]{n}+3)^{\alpha}}$, entrambe a termini positivi e dunque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\underline{\text{se}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è una serie geometrica che converge se

$$\frac{1}{(\alpha-3)^2} < 1 \iff \alpha - 3 > 1 \text{ o } -\alpha + 3 > 1$$

$$\iff \alpha < 2 \text{ o } 4 < \alpha$$

$$\iff \alpha \in]-\infty, 2) \cup (4, +\infty[$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad c_n = \frac{1}{(\sqrt[3]{n}+3)^{\alpha}} \sim \frac{1}{n^{\alpha/3}} \qquad n \to \infty$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge se $\alpha/3 > 1$ se $\alpha > 3$

se $\alpha \in (3,+\infty)$

In conclusione

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $\alpha \in \big((-\infty,2)\cup(4,+\infty)\big) \cap (3,+\infty)$

se $\alpha \in (4,+\infty)$

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1-\sin x},$$

determinare (se esistono) a, $b \in \mathbb{R}$ in modo che esista finito il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+ax+bx^2}{x^3}.$$

la funzione $f(x)$ è infinitesima per $x \to 0$

$1-\sin x = 1 - x + o(x^2)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-\sin x} = \frac{x}{1-[x+o(x^2)]} = x\left(1+[x+o(x^2)]+[x+o(x^2)]^2+o(x^2)\right)$$

$$= x\left(1+x+x^2+o(x^2)\right) = x+x^2+x^3+o(x^3)$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+ax+bx^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2+x^3+o(x^3)+ax+bx^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+a)+x^2(1+b)+x^3+o(x^3)}{x^3} = 1 \quad \text{se } a=-1,\ b=-1$$

Esercizio 4. Stabilire se è convergente il seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx.$$

Stabilire per quali valori del parametro reale α risulta convergente l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2-1)^\alpha}\, dx.$$

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} > 0$ e continua $\forall x \in (1,+\infty)$.

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge se $\int_1^{2} f(x)dx$ converge e $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge

$\int_1^{2} f(x)dx$: $f(x) \sim \frac{1}{2}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} = \frac{1}{2}\frac{(x-1)+o(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2} + o(1) \quad x \to 1$

e dunque $\int_1^{2} f(x)dx \in \mathbb{R}$ in quanto $f(x)$ è continua e limitata su $(1,2]$

$\int_2^{+\infty} f(x)dx$: $f(x) \sim \frac{\ln x}{x^2}$ per $x \to +\infty$

Ma $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x / x^2}{1/x^{3/2}} = 0 \Rightarrow \exists c > 0 : \frac{\ln x}{x^2} \leq c\frac{1}{x^{3/2}}$ $\forall x \in (2,+\infty)$

Essendo $\int_2^{+\infty} \frac{c}{x^{3/2}} \in \mathbb{R}$, per il criterio del confronto segue che $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \in \mathbb{R}$

e per il criterio del confronto asintotico $\int_2^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$

Dunque $\int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$

Quando si considera $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2-1)^\alpha} dx$ si ha

$\int_1^2 f_\alpha(x)\,dx$: $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2^\alpha} \frac{\ln x}{(x-1)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \frac{(x-1)+o(x-1)}{(x-1)^\alpha} \sim \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}$ per $x \to 1$

e $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}} \in \mathbb{R}$ se $\alpha - 1 < 1$ se $\alpha < 2$

e per il criterio del confronto asintotico $\int_1^2 f_\alpha(x)dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha < 2$

$\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)dx$: $f_\alpha(x) \sim \frac{\ln x}{x^{2\alpha}}$ per $x \to +\infty$

$\boxed{\text{quando } 2\alpha \leq 1}$ si ha $\frac{\ln x}{x^{2\alpha}} \geq \frac{\ln 2}{x}$ $\forall x \geq 2$ con $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(2)}{x} dx = +\infty$

e per il teorema del confronto $\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)dx = +\infty$

quando $2\alpha > 1$, preso $q = \frac{1+2\alpha}{2}$ si ha

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^{2\alpha}}}{\frac{1}{x^q}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{2\alpha - q}} = 0$ poiché $2\alpha - q = \frac{2\alpha}{2} - 1 > 0$

Ne segue che $\exists c > 0 : \frac{\ln x}{x^{2\alpha}} \leq \frac{c}{x^q}$ $\forall x \geq 2$, ed essendo

$q = \frac{2\alpha+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$ si ha $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^q} \in \mathbb{R}$

Per il Teorema del confronto $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{2\alpha}} dx \in \mathbb{R}$, e quindi

per il Teorema del confronto asintotico $\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)dx \in \mathbb{R}$

Riassumendo $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx \in \mathbb{R}$ se $\int_1^2 f_\alpha dx \in \mathbb{R}$ e $\int_2^{+\infty} f_\alpha dx \in \mathbb{R}$ se $\frac{1}{2} < \alpha < 2$