Analisi Matematica 1 – CdL Matematica e Fisica
Quiz proposto in data 3 dicembre 2015
CORREZIONE

(1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si ha necessariamente che

(A) $f(x) < 3 \ \forall x < -100$.
(B) $(2, +\infty) \subset f(\mathbb{R})$.
(C) $f(\mathbb{R}) = (2, +\infty)$.
(D) $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0$.

La risposta corretta è la (B): per ipotesi si ha

$\inf f(\mathbb{R}) \leq 2$ $\qquad \sup f(\mathbb{R}) = +\infty$

e per la continuità di f $(2, +\infty) \subset f(\mathbb{R})$

(A) è falsa $\quad f(x) = \begin{cases} 3 + (x+100) & \text{se } x \geq -100 \\ 3 + \dfrac{x+100}{1-x-100} & \end{cases}$ è un controesempio

(C) è falsa $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$ è un controesempio $(f(0) = 0 < 2)$

(D) è falsa $\quad f(x) = 2 + e^x$ è un controesempio $(f(x) > 2 \ \forall x \in \mathbb{R})$

(2) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, allora necessariamente

(A) $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^n = 1$.
(B) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < 10$
(C) $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = 1$.
(D) $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $4a_n^2 - a_n < 4$.

(D) è vera: per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad 1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$

Ne segue che $4a_n^2 - a_n \leq 4(1+\varepsilon)^2 - 1 + \varepsilon = 4 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2 - 1 + \varepsilon = 3 + 9\varepsilon + 4\varepsilon^2 < 4$

non appena si prenda $9\varepsilon + 4\varepsilon^2 < 1$.

(A) è falsa: $1 + 1/n \to 1$ ma $(1 + 1/n)^n \to e \neq 1$

(B) è falsa: prendendo $a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(C) è falsa: $a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

(3) Sia $I = (-3, 2)$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione decrescente. Posto $A = \{f(x) \ : \ x \in I\}$, si ha necessariamente che

(A) $-1 \in A$.
(B) A è un intervallo.
(C) $\inf A = \lim_{x\to2^-} f(x)$.
(D) A è inferiormente limitato.

(C) è vera: c'è un Teorema che afferma che

$\exists \lim_{x\to2^-} f(x) = \inf f((-3,2))$

(A) è falsa: $f(x) = 5 - x$ è un controesempio in quanto $f(x) \geq 3 \ \forall x$

(B) è falsa $\quad f(x) = \begin{cases} 10 - x & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ è un controesempio in quanto

$(5, 10) \not\subset A = \{x : f(x) \ldots$

(D) è falsa $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ è un controesempio poiché

$\inf f(-3,2) = -\infty = \lim_{x\to2^-} f(x)$

(4) La funzione $f : \Re \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } |x| \geq 2, \\ ax + b, & \text{se } |x| < 2 \end{cases}$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$

(A) se $a = -2$ e $b = 4$.
(B) se a è qualsiasi e $b = 2a$.
(C) per nessun valore di a e b.
(D) se $a = 2$ e $b = 4$.

Dobbiamo rendere continua f in $x=-2$ e $x=2$

$\lim_{x\to -2^-} f = \lim_{x\to -2^-} x^2+2x = 0 = \lim_{x\to -2^+} ax+b = -2a+b \Rightarrow \boxed{b=2a} \Rightarrow$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax+b = 2a+b = \lim_{x\to 2^+} x^2+2x = 8 \Rightarrow \boxed{2a+b=8}$

dobbiamo risolvere $\begin{cases} b=2a \\ 2a+2a=8 \end{cases}$ $\begin{cases} b=4 \\ a=2 \end{cases}$

e dunque la risposta corretta è (D)

(5) Sia $f(x) = 3|x-2| - 1$. La controimmagine dell'intervallo $[-2, 3)$ è:

(A) $[0, 10/3)$.
(B) $[-1, 11]$.
(C) $(2/3, 10/3)$.
(D) $(2/3, 7/3)$.

Dobbiamo risolvere la disequazione

$$-2 \leq 3|x-2| - 1 < 3 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq 3|x-2| < 4 \qquad \text{ma } |x-2| \geq 0 \ \forall x \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad |x-2| < \tfrac{4}{3} \Leftrightarrow -\tfrac{4}{3} < x-2 < \tfrac{4}{3} \Leftrightarrow \tfrac{2}{3} < x < \tfrac{10}{3}$$

ovvero $f^{-1}([-2,3)) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{10}{3})$ e la risposta corretta è la (C)

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ t.c. $0 < f(x) < \varepsilon$, $\forall x > M$. Quale tra le seguenti affermazioni è necessariamente vera?

(A) $\exists \overline{\varepsilon}, \overline{M} > 0$ t.c. $f(x) \geq \overline{\varepsilon}\ \forall x > \overline{M}$.
(B) $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$.
(C) f è limitata superiormente.
(D) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Per definizione $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overline{M} > 0 : \forall x > \overline{M} \quad 0 < f(x) < \varepsilon$

e dunque la (D) è vera

(B) è falsa : $f(x) = e^{-x}$ è un controesempio in quanto $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

(C) è falsa : $f(x) = e^{-x}$ è un controesempio in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty = \sup f(\mathbb{R})$$

(A) non ha senso : $f < \varepsilon \ \forall x > M$!!!

(7) Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{4^{3x} - 1}{3^{4x} - 1}$ vale

(A) $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.
(B) $\frac{3 \ln 4}{4 \ln 3}$.
(C) $\ln\left(\frac{4^3}{3^4}\right)$.
(D) $+\infty$.

Un calcolo diretto prova che

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^{3x}-1}{3^{4x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{4^{3x}-1}{x} \cdot \frac{x}{3^{4x}-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x\ln(4)} - 1}{3x\ln(4)} \cdot 3\ln(4) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4x\ln 3}{e^{4x\ln 3} - 1} \cdot \frac{1}{4\ln 3} = \frac{3\ln(4)}{4\ln(3)}$$

e dunque la risposta corretta è la (B)