Prova scritta del 27 gennaio 2016

a.a. 2014-15 Correzione

1) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) = e^x + 1 - 2x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 4, \end{cases}$$

indicando esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Integrale generale eq. omogenea associata $y''-y'=0$

l'equazione caratteristica è $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$

che ha soluzioni $\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1\\ e^x\end{cases}$ sono due soluz. linearmente indipendenti

$\Rightarrow y_0(x)=c_1+c_2e^x$ $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ sono tutte le soluzioni dell'eq. omogenea

Soluzione particolare di $y''-y'=e^x$ $(*)$

il secondo membro è e^x, che è soluzione dell'eq. omogenea $\Rightarrow$ impongo che

$\sigma(x)=kx\,e^x$ sia soluzione di $(*)$

$\sigma' = kxe^x+e^x\cdot k$

$\sigma'' = kxe^x+2e^x\cdot k$

$\cancel{kxe^x}+2ke^x-\cancel{kxe^x}-ke^x=e^x \quad\Rightarrow k=1$

$\Rightarrow y_{p,1}=xe^x$ è soluzione particolare di $(*)$

Soluzione particolare di $y'' - y' = -2x+1$ $(**)$

il secondo membro è un polinomio di 1° grado

ma 1 è soluzione dell'eq. omogenea $\Rightarrow$

impongo che $v(x) = (ax+b)\cdot x$ sia soluzione

di $(**)$ $\quad v' = 2ax+b$

$v'' = 2a$

$$2a - (2ax+b) = -2x+1 \iff \begin{cases} -2a = -2 \\ 2a-b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2a-1 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_{p,2} = x^2+x$ è soluzione particolare di $(**)$

Integrale generale $\quad y_g(x) = y_o(x) + y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$

ovvero $y_g(x) = c_1 + c_2 e^x + xe^x + x^2 + x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_g(0) = c_1 + c_2 = 1$

$y_g' = c_2 e^x + xe^x + e^x + 2x + 1$ ovvero $\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$

$y_g'(0) = c_2 + 2 = 4$

ovvero $y = -1 + 2e^x + xe^x + x^2 + x$ è la soluzione del problema di Cauchy ed è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

2 Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n .$$

Calcolare la somma $S(\alpha)$ sella serie.

Questa è una serie geometrica di ragione

$$q = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$$

che converge se $|q|<1$

diverge a $+\infty$ se $q \geq 1$

non converge se $q \leq -1$

$$-1 < \frac{\alpha-1}{\alpha} < 1 \text{ se } \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}+1>0 \\ \frac{\alpha-1}{\alpha}-1<0 \end{cases} \text{ se } \begin{cases} \frac{2\alpha-1}{\alpha}>0 \\ -\frac{1}{\alpha}<0 \end{cases} \text{ se } \alpha \in \left(\tfrac{1}{2},+\infty\right)$$

$$\frac{2\alpha-1}{\alpha}>0, \quad \iff \alpha \in \left]-\infty,0\right) \cup \left(\tfrac{1}{2},+\infty\right[$$

$$-\frac{1}{\alpha}<0 \iff \frac{1}{\alpha}>0 \iff \alpha \in (0,+\infty)$$

Dunque la serie converge se $\alpha > \frac{1}{2}$

La somma, quando $\alpha > \frac{1}{2}$, è data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \frac{1}{\frac{\alpha-\alpha+1}{\alpha}} = \alpha$$

3) Determinate per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ è soddisfatta la seguente equazione

$$(z+\mathrm{i})^6 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{12}.$$

Questa equazione è del tipo $(z+i)^6 = b$ dove $b = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{12}$ ed ha 6 soluzioni che si ottengono estraendo le 6 radici di b

$$b = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)^{12}$$

$$= \cos\left(\frac{12}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{12}{4}\pi\right) = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$$

$\sqrt[6]{b}$ sono date da

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = i$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}(\quad) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i\,\mathrm{sen}(\quad) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$w_4 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}(\quad) = -i$$

$$w_5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}(\quad) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

e dunque le soluzioni cercate sono

$$z_0 + i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_1 + i = i \Rightarrow z_1 = 0$$

$$z_2 + i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_3 + i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \Rightarrow z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$z_4 + i = -i \Rightarrow z_4 = -2i$$

$$z_5 + i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \Rightarrow z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

4) Data la funzione
$$f(x)=\frac{e^{x+3}}{4x^2+3},$$
se ne determini: il dominio Ω, i limiti agli estremi di Ω, gli asintoti, i punti di massimo e minimo relativi e le regioni di monotonia. Tracciare un grafico qualitativo di f. Determinare, al variare di $k\in\mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=k$.

Dominio: $4x^2+3$ ha come dominio $\mathbb{R}$ e $4x^2+3\geq 3\ \forall x$

e^{x+3} " " " "

$\Rightarrow$ dominio di $f\equiv\mathbb{R}$

Segno di f: $f>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ in quanto $e^{x+3}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$4x^2+3\geq 3$ "

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{e^{-\infty}}{+\infty}=0$$ (non è una forma indeterminata e dunque è = rapporto limiti)

e dunque $y=0$ è asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+3}}{8x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+3}}{8}=e^{+\infty}=+\infty$$

essendo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ non esistono asintoti obliqui

Regioni di monotonia $$f'(x)=\frac{e^{x+3}(4x^2+3)-8xe^{x+3}}{(4x^2+3)^2}=\frac{e^{x+3}}{(4x^2+3)^2}\cdot(4x^2-8x+3)$$

$f'=0$ se $4x^2-8x+3=0$ se $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{4}$ $\begin{cases}1/2\\ 3/2\end{cases}$

e si ha $f'\begin{cases}>0 & x<\frac12\\ <0 & \frac12<x<\frac32\\ >0 & \frac32<x\end{cases}$

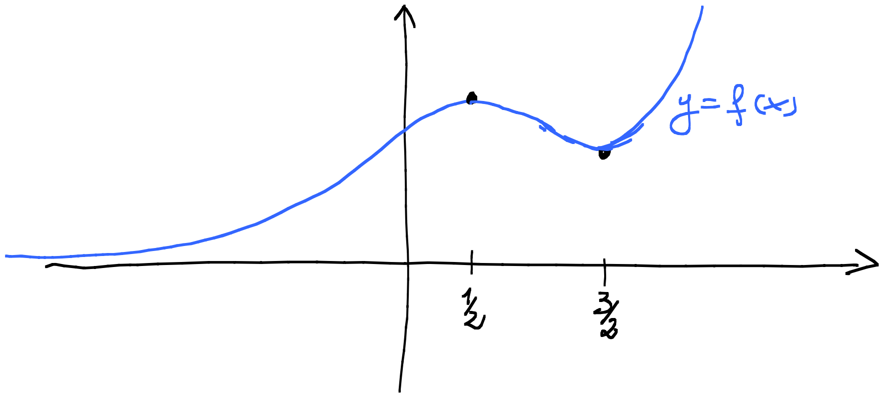
da cui segue che $x_1=\frac12$ è punto di massimo relativo

con $f(x_1)=\dfrac{e^{7/2}}{4}$

mentre $x_2=\frac32$ è punto di minimo relativo e

$f(x_2)=\dfrac{e^{9/2}}{12}$ (che è $<f(x_1)$)

Un grafico approssimato è il seguente $\left(f(0)=\dfrac{e^3}{3}\right)$



Si osserva che cambia 2 volte concavità almeno
(ma non facciamo lo studio di f'')

Soluzioni di $f(x) = k$

Se $k \leq 0$ allora non ci sono soluzioni di $f = k$

Se $0 < k < f(\frac{3}{2}) = \frac{e^{9/2}}{12}$ allora c'è 1! soluzione " "

Se $k = f(\frac{3}{2})$ allora ci sono 2 soluzioni "

Se $f(\frac{3}{2}) < k < f(\frac{1}{2}) = \frac{e^{7/2}}{4}$ allora ci sono 3 soluzioni "

Se $f(\frac{1}{2}) = k$ allora ci sono 2 soluzioni "

Se $f(\frac{1}{2}) < k$ allora c'è 1! soluzione "