Analisi Matematica 1 Matematici e Fisici
Prova scritta 23 febbraio 2016
a.a. 2014-15 Correzione

Esercizio 1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2 - 2x + 2e^x, \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

indicando l'insieme di definizione.

Ricerca $y_0(x)$, integrale generale dell'omogenea associata $y'' - 2y' + y = 0$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} e^x \\ xe^x \end{cases}$$

sono due soluzioni tra loro indipendenti della eq. omogenea $\Rightarrow y_0(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 x e^x \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ricerca soluzione particolare di $y'' - 2y' + y = x^2 - 2x \quad (*)$

il termine noto è un polinomio 2° grado $\Rightarrow$

Imponiamo che $v(x) = ax^2 + bx + c$ sia soluzione

$v'(x) = 2ax + b$

$v''(x) = 2a$

ed otteniamo $2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 - 2x$

$ax^2 + x(-4a + b) + (2a - 2b + c) = x^2 - 2x$

che deve valere $\forall x \in \mathbb{R}$, e dunque necessariamente

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -2 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2(b - a) = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_{p,1}(x) = x^2 + 2x + 2$ è soluzione particolare di $(*)$

Ricerca soluzione particolare di $y'' - 2y' + y = 2e^x \quad (**)$

il termine noto è $2e^x$, ma e^x e xe^x sono soluzioni

$\Rightarrow$ impongo che $y(x) = (ke^x)\cdot x^2$ sia soluzione di $(**)$

$y' = 2kxe^x + kx^2e^x$

$y'' = 2ke^x + 2kxe^x + 2kxe^x + kx^2e^x$

$$e^x(\cancel{kx^2} + 4kx + 2k) - 2e^x(\cancel{kx^2} + 2kx) + \cancel{kx^2}e^x = 2e^x$$

$$\cancel{4kx} + 2k - \cancel{4kx} = 2 \Rightarrow k = 1$$

$\Rightarrow y_{p,2}(x) = x^2 \cdot e^x$ è soluzione particolare di $(**)$

Integrale Generale $y_g(x) = y_0(x) + y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$

$\Rightarrow y_g(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^2 + 2x + 2 + x^2e^x \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_g(0) = c_1 + 2 = -1 \Rightarrow c_1 = -3$

$y_g' = -3e^x + c_2e^x + c_2xe^x + 2x + 2 + 2xe^x + x^2e^x$

$y_g'(0) = -3 + c_2 + 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Dunque $y(x) = -3e^x + \frac{3}{2}xe^x + x^2 + 2x + 2 + x^2e^x$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$, è l'unica soluzione del problema di Cauchy

Esercizio 2. Sia data la funzione $f(x) = e^x\,(x^2 - 8|x-3| - 8)$.

i) Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi del dominio, gli asintoti, i punti di discontinuità (della funzione e/o della derivata prima), regioni di monotonia, natura dei punti stazionari.

ii) Tracciare un grafico approssimato della funzione.

iii) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Dominio : $\forall x \in \mathbb{R}$

Limiti agli estremi : $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \left(1 - \frac{8|x-3|}{x^2} - \frac{8}{x^2}\right)$

e dunque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 2e^{-\infty} = 0^+$

e dunque $y=0$ asintoto orizzontale

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

dunque $\nexists$ asintoti obliqui

Segno di $f(x) = e^x (x^2 - 8|x-3| - 8)$

Questo coincide con il segno di $x^2 - 8|x-3| - 8$

$x<3$ $\quad f>0$ se $\begin{cases} x^2+8x-32>0 \\ x<3 \end{cases}$ $\qquad x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16+32} = -4 \pm 4\sqrt{3}$

se $x < -4-4\sqrt{3}$ o $-4+4\sqrt{3} < x < 3$

$x \geq 3$ $\quad f>0$ se $\begin{cases} x^2-8x+16 = (x-4)^2 > 0 \\ x>3 \end{cases}$

se $3 \leq x < 4$ o $4 < x$

Dunque $f>0$ se $x \in]-\infty, -4-4\sqrt{3}[\cup]-4+4\sqrt{3}, 4[\cup]4, +\infty[$

Studio della derivata prima $\qquad |x-3| = \begin{cases} -x+3 & x<3 \\ x-3 & x\geq 3 \end{cases}$

$f(x) = e^x (x^2 - 8|x-3| - 8)$

$f'(x) = e^x (x^2 - 8|x-3| - 8) + e^x \left(2x - 8 \frac{x-3}{|x-3|}\right)$ $\qquad |x-3| \begin{cases} -(x-3) & x<3 \end{cases}$

$= e^x \left[x^2 - 8|x-3| - 8\left(1 + \frac{x-3}{|x-3|}\right) + 2x\right] \quad x \neq 3$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x (x^2+10x-24) & x<3 \\ e^x (x^2-6x+8) & x>3 \end{cases}$$

$x=3$ è un punto di discontinuità per f' in quanto

$\lim_{x \to 3^-} f' = \lim_{x \to 3^-} e^x (x^2 - 8(3-x) + 2x) = e^3 (9+6) = 15e^3$

$\neq$

$\lim_{x \to 3^+} f' = \lim_{x \to 3^+} e^x (x^2 - 8(x-3) + 2x - 16) = e^3 (9+6-16) = -e^3$

$x<3$ $\quad f'=0$ se $\begin{cases} x^2+10x-24=0 \\ x<3 \end{cases}$ se $\begin{cases} x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25+24} \\ x<3 \end{cases}$

se $x_1 = -12$ e $f' \begin{cases} >0 & x<-12 \\ <0 & -12<x<2 \\ >0 & 2<x<3 \end{cases}$

$x_2 = 2$

e dunque $x_1 = -12$ è punto di massimo relativo

$f(-12) = e^{-12}(144-72-8) = \frac{64}{e^{12}} = \left(\frac{8}{e^6}\right)^2$

mentre $x_2 = 2$ è punto di minimo ASSOLUTO

$$f(2) = e^2\left(4 - 8|2-3| - 8\right) = -12e^2$$

$x_3 = 3$ è p.to di massimo relativo e $f(3) = e^3(9-8) = e^3$

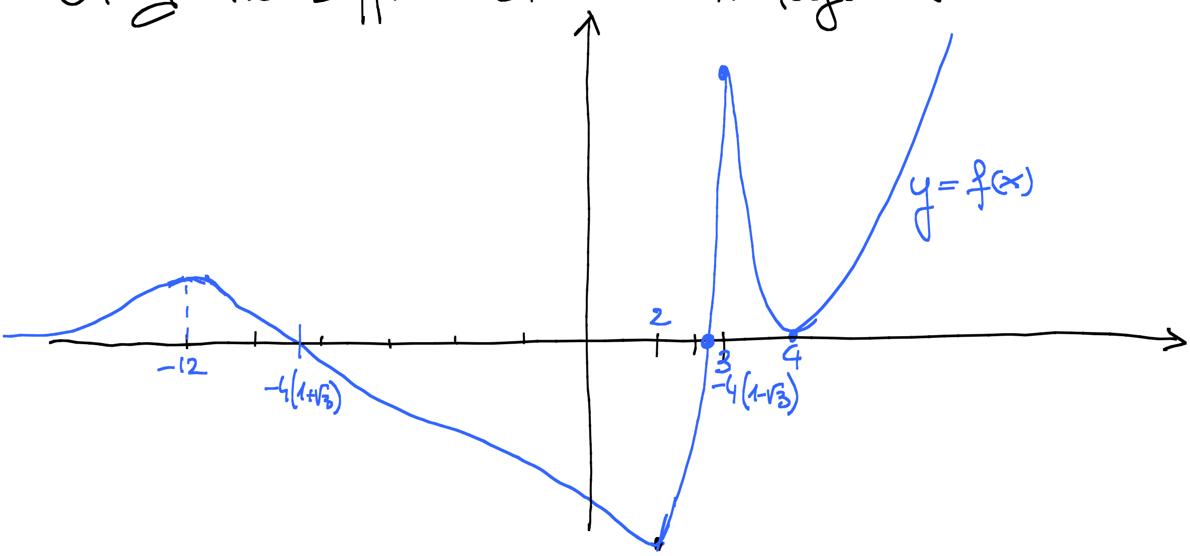
$x > 3$; $f' = 0$ se $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x > 3 \end{cases}$ se $x_{4,5} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$

se $\begin{cases} \cancel{x_4 = 2} \\ x_5 = 4 \end{cases}$ e $f' \begin{cases} < 0 & 3 < x < 4 \\ > 0 & 4 < x \end{cases}$

ovvero $x_5 = 4$ è punto di minimo relativo e

$$f(4) = e^4\left(16 - 8|4-3| - 8\right) = 0$$

Un grafico approssimativo è il seguente



Adesso

$k < f(2) = -12e^2 \Rightarrow f = k$ non ha soluzioni

$k = f(2) \Rightarrow f = f(2)$ ha 1! soluzione $x=2$

$f(2) < k < 0 \Rightarrow f = k$ ha 2 soluzioni

$k = 0 \Rightarrow f = 0$ ha 3 soluzioni

$0 < k < f(-12) \Rightarrow f = k$ ha 5 soluzioni

$k = f(-12) \Rightarrow f = k$ ha 4 soluzioni

$f(-12) < k < e^3 = f(3) \Rightarrow f = k$ ha 3 soluzioni

$k = f(3) \Rightarrow f = k$ ha 2 soluzioni

$f(3) < k \Rightarrow f = k$ ha 1! soluzione

Esercizio 3. Determinate il valore del parametro λ in modo che $z = i$ sia soluzione dell'equazione

$$z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2;$$

calcolate poi, in corrispondenza a questo valore di λ, tutte le soluzioni dell'equazione.

Imponendo che $z=i$ sia soluzione si trova

$$i^4 - 2i^3 + \lambda i^2 - 2i + 2 = 0$$

$$1 + \cancel{2i} - \lambda - \cancel{2i} + 2 = 0$$

$$\lambda = 3$$

Dunque $z_1 = i$ è soluzione di $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$ (*)

ma il polinomio è a coefficienti reali $\Rightarrow$ $z_2 = -i$ è soluzione di (*)

Ne segue che $(z-i)(z+i) = z^2+1$ divide $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 & -2z^3 & +3z^2 & -2z & +2 & z^2+1 \\
z^4 & & +2z^2 & & & z^2-2z+2 \\
\hline
// & -2z^3 & +2z^2 & -2z & +2 & \\
 & -2z^3 & & -2z & & \\
\hline
 & // & 2z^2 & & +2 &
\end{array}$$

ovvero

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 =$$
$$= (z^2+1)(z^2-2z+2)$$

e dunque le ultime due radici sono le soluzioni di

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

Dunque $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1-i$, $z_4 = 1+i$

Esercizio 4. Stabilire i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{1+\alpha} + x^{3+\alpha}} dx$$

converge.

$f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x^{1+\alpha}(1+x^2)}$ è definita positiva e continua su $]0,+\infty[$

Dobbiamo scoprire per quali α convergono simultaneamente $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

a) $\int_0^1 f(x)dx$

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{1+\alpha}(1+x^2)} \sim \frac{x}{x^{1+\alpha}} = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{quando } x \to 0$$

e dunque $\int_0^1 f\,dx$ converge se $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge se $\alpha < 1$

b) $\int_1^{+\infty} f\,dx$

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{1+\alpha}(1+x^2)} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{1+\alpha} \cdot x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{3+\alpha}} \quad \text{quando } x \to \infty$$

$\int_1^{+\infty} f\,dx$ converge $\boxed{\text{se}}$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3+\alpha}}$ converge $\boxed{\text{se}}$ $3+\alpha > 1$

$\boxed{\text{se}}$ $\alpha > -2$

Dunque $\boxed{\int_1^{+\infty} f\,dx \in \mathbb{R} \text{ se } -2 < \alpha < 1}$